Оценки на коммуникационную сложность функции связности графа

Пименов Марк

12 июня 2024 г.

1 Введение

Пусть имеется некоторая функция $f : X \times Y \to \{0,1\}$ от двух аргументов, и два игрока, Алиса и Боб, получают входы $x \in X,\ y \in Y$, соответственно, и хотят вычислить значение $f(x,y)$. Алиса и Боб имеют устройство связи, которое позволяет передавать друг другу битовые сообщения. Они могут заранее договориться, как им требуется отправлять сообщения. Обозначим через $C(f)$ минимальное количество сообщений, которые понадобятся Алисе и Бобу, чтобы **обоим** узнать, чему равно $f(x,y)$. Для этой игры определим **протокол общения**.

Определение 1.1

Протокол общения для функции f — это упорядоченное корневое двоичное дерево со следующими пометками:

- Каждая внутренняя вершина помечена буквой «А» или «Б».
- Каждое ребро к левому потомку помечено нулём, к правому — единицей.
- Каждый лист помечен элементом множества Z.

Для каждой внутренней вершины v с пометкой «А» определена функция $A_v : X \to \{0,1\}$, а для каждой внутренней вершины u с пометкой «Б» определена функция $B_u : Y \to \{0,1\}$.

- Первая вершина $\pi(x,y)$ — это корень.
- Каждая следующая вершина пути является потомком предыдущей, причём
  - Каждая вершина пути v с пометкой «А» соединена с потомком ребром с пометкой A_v(x).
  - Каждая вершина u с пометкой «Б» соединена с потомком ребром с пометкой $B_u(y)$.
- Последняя вершина $\pi(x,y)$ — лист.

Протокол Π называется корректным протоколом для функции f, если для каждой пары входов (x,y) выполняется $\Pi(x,y) = f(x,y)$.

Теперь перейдём к формулировке нашей задачи. Для этого нам потребуется ввести несколько обозначений.

1. $\chi(G)$ — хроматическое число графа G.

2. Функция связности графа $f_G(x, y)$ равна 1, если между вершинвми x и y есть ребро, и равна 0 иначе.

3. Для двудольного подграфа H графа G с долями A_k и A_l функция связности $g_H(v, u), v \in A_k, u \in A_l$ принимает значение 1, если между u и v есть ребро, и 0, если этого ребра нет.

4. $C(G)$ — максимальное $C(g_H)$ среди всех существующих двудольных подграфов H графа G.

Задача 1.1

Пусть дан граф G без петель. Алиса и Боб получают две вершины данного графа x, y и хотят узнать, существует ли в графе ребро (x, y). Или, иначе говоря, хотят вычислить значение функции связности $f_G(x, y)$. Доказать, что:

$$\max(C(G), \log(\chi(G))) \leq C(f_G) \leq 2 \cdot \log(\chi(G)) + C(G).$$

2 Результаты

Для начала будет доказана оценка снизу, а после — сверху. Также хотелось бы отметить, что нижняя и вверхняя оценка отличаются не более чем в 3 раза.

Лемма 2.1

Пусть Π — некоторый протокол для функции $f\colon X \times Y \to Z$. Тогда если пути $\pi(x_1, y_1)$ и $\pi(x_2, y_2)$ заканчиваются в одном и том же листе, то и $\pi(x_1, y_2)$, и $\pi(x_2, y_1)$ заканчиваются в том же листе.

Доказательство. Заметим, что так как наш граф — это дерево, то если пути от корня заканчиваются в одном и том же листе, то пути просто совпадают. Ведь иначе в дереве есть цикл. Тогда это означает, что при числах (x_1, y_1) и (x_2, y_2) Алиса и Боб отправили друг другу абсолютно одинаковые сообщения в этих двух случаях. Это означает, что когда Алиса получит x_1, а Боб y_2. То Боб будет отправлять то же самое что и при (x_2, y_2) (что тоже самое что он отправлял при (x_1, y_1)), ведь у него y_2 и Алиса ему отправляет аналогично то же самое что и она отправляла в (x_1, y_1), ведь у неё x_1 и Боб отправляет ей то же самое что и в (x_1, y_1). Ну то есть у них у обоих та же информация при себе в случие Алисы что и в случие (x_1, y_1), а у Боба та же информация что и в случие (x_2, y_2). А потому они будут действовать также что и в этих случаях. Тогда путь при (x_1, y_2) точно такой же что и при (x_1, y_1) и (x_2, y_2). И аналогично такой же путь при (x_2, y_1). Ну значит пути (x_1, y_2) и (x_2, y_1) одинаковые, а значит и заканчиваються они в одном и том же листе. □

Теорема 2.1

Для всякого графа G верно неравенство: $\max(C(G), \log(\chi(G))) \leq C(f_G)$.

Доказательство. Пользуясь леммой 2.1 докажем, что $\log(\chi(G)) \leq C(f_G)$. Предположим обратное. Рассмотрим протокол, глубина H которого меньше $\log(\chi(G))$. Рассмотрим множество S вершин протокола, в которых заканчиваются пути вида $\pi(v, v)$, где v — вершина G. Каждую вершину v графа G покрасим в цвет с тем же номером, что и у элемента S, соответствующего пути $\pi(v, v)$.

Поймём теперь, почему рёбер между вершинами одного цвета в данной расскраске не будет. Пусть $\pi(x, x)$ и $\pi(y, y)$ заканчиваются в одной вершине, тогда по лемме 2.1 $\pi(x, y)$ также заканчивается в том же листе. А так как значение, соответствующее данному листу — 0, то между x и y нет ребра. Заметим, что при этом мы использовали не более чем 2^H цветов, ведь один лист — один цвет.

Второе неравенство $C(G) \leq C(f_G)$ тривиально, так как $C(G)$ является подфункцией функции связности всего графа f_G. □

Теорема 2.2

$2 \cdot \log(\chi(G)) + C(G) \geq C(f_G)$.

Доказательство. Зафиксируем расскраску графа G в $\chi(G)$ цветов. Алиса и Боб за $2 \cdot \log(\chi(G))$ битов отправят друг другу цвет своей вершины. Если цвет одинаковый, то сразу понятно, что ребра нет. Если же цвет разный, то, используя не более $C(G)$ сообщений, игроки могут понять, есть ли ребро между вершинами, ведь задача сведена к двудольному графу. □