Разделение полудуплексной модели с честным противником и классической коммуникационной модели

Дидоренко М.А.

12 июня 2024 г.

1 Введение

Задачи на комуникационную сложность в общем случае имеют следующую формулировку: дана некоторая функция $f : X \times Y \to Z$, Алиса и Боб знают по одному числу $a \in X$ и $b \in Y$, соответственно, и хотят вычислить значение $f(a, b)$. При этом они могут отправлять друг другу сообщения 0 или 1 и хотят достичь своей цели за минимально возможное количество сообщений.

Коммуникационное устройство, используемое Алисой и Бобом в классической модели, обладает следующим свойством: в каждый момент времени один игрок посылает некоторый бит, а другой его принимает. В полудуплексной модели коммуникация будет проходить несколько иначе. Теперь Алиса и Боб будут использовать устройство, принцип работы которого похож на работу рации: для того, чтобы отправить сообщение, нужно нажать на кнопку, переводящую устройство в режим передачи, а для того, чтобы вернуться в режим приёма сообщений, нужно эту кнопку отпустить. Если оба игрока пытаются одновременно передать сообщение, то их сообщения «теряются». Если, наоборот, оба игрока находятся в принимающем состоянии, то они слышат «тишину».

Давайте опишем взаимодействие игроков с таким передающим устройством более подробно. Будем считать, что кроме передающего устройства у игроков есть некоторый способ синхронизации, который позволяет разбить взаимодействие игроков на раунды. Для простоты будем считать, что каждый раунд длится одну минуту. В начале каждой минуты начинается новый раунд, и каждый из игроков выбирает одно из трёх действий: «принимать», «послать 0», «послать 1». Если один из игроков принимает, а другой посылает, то устройство работает так же, как и раньше, будем называть это классическим раундом. Если оба игрока посылают, то их сообщения теряются (и они об этом не знают). Такой раунд будем называть «потерянным». Если оба игрока принимают, то такой раунд называется «тихим». Тихие раунды определяются по-разному в различных коммуникационных моделях.

В данной работе мы будем рассматривать полудуплексную модель с честным противником. В такой модели во время «тихого» раунда игроки принимают одинаковые биты, выбранные некоторой третьей стороной — противником.

Определение 1.1

Через $C_h(R)$ будем обозначать полудуплексную коммуникационную сложность R с честным противником — минимальную глубину полудуплексного коммуникационного протокола с честным противником, решающего коммуникационную задачу для отношения R.

Заметим, что в полудуплексной коммуникационной модели можно воссоздать любой протокол обычной коммуникационной сложности: Алиса и Боб отказываются использовать тихие и потраченные раунды и следуют протоколу для обычной сложности. Получаем следующую оценку:

$$C(R) \geq C_h(R)$$

Главная цель данной работы — отделить одну модель от другой. Для этого достаточно привести пример функции, которую в полудуплексной модели с противником можно вычислить строго быстрее, чем в классической коммуникационной модели. Мы будем исследовать следующую функцию-кандидата $f : X \times Y \to \{0, 1\}$, где $X = Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, значения которой представлены в матрице на рис. 1.

1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1

Рис. 1. Матрица значений функции f.

Более конкретно, мы формулируем следующую исследовательскую задачу.

Задача 1.1

Рассмотрим функцию f, которая задана матрицей 1.
Доказать, что $C(f) > C_h(f)$.

2 Результаты

Доказательство состоит из двух основных блоков: оценка снизу для обычной коммуникационной сложности и верхняя оценка примером протокола для полудуплексной модели с честным противником. Сначала докажем первый факт:

Теорема 2.1

$C(f) \geq 4$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу функции $f : X \times Y \to \{0, 1\}$, $X = Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Заметим тогда, что входы $(1, 6), (2, 5), (3, 1), (4, 2), (5, 4), (6, 3)$ образуют трудное множество по 0-одноцветным прямоугольникам: $\chi_0(f) = 6$. Аналогично возьмём входы, образующие трудное множество по 1-одноцветным прямоугольникам: $(1, 5)$, $(2, 6)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$, $(5, 3)$, $(6, 4)$. Значит, $\chi_1(f) = 6$. Далее по утверждению 1 получаем требуемую оценку:

$$C(f) \geq \log \chi(f) = \log(\chi_0(f) + \chi_1(f)) = \log(6 + 6) > 3.$$

□

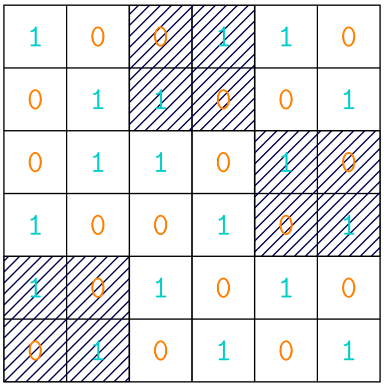

Рис. 2. Трудное множество на матрице функции f.

Перейдём к описанию прокотола общения для Алисы и Боба, чтобы доказать верхнюю оценку на коммуникационную сложность с честным противником.

Теорема 2.2

$C_h(f) \leq 3.$

Доказательство. Покажем, что игроки всегда смогут узнать значение функции за три раунда в модели с противником:

1. В первом раунде игроки действуют одинаково согласно Таблице 1.
2. Во время второго раунда Боб принимает, а Алиса отправляет своё сообщение исходя из информации, полученной в первом раунде (см. Таблицу 2).
3. В третьем раунде Боб вычисляет значение функции по информации, полученной за первые два раунда, и отправляет его Алисе (см. Таблицу 3).

Входы:	**1,2**	**3,4**	**5,6**
Действие:	Отправить 1	Принимать	Отправить 0

Таблица 1. Действия игроков в первом раунде.

I раунд \ Входы	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Отправила 1 или приняла 1	1	0	0	1	–	–
Отправила 0 или приняла 0	–	–	1	0	1	0

Таблица 2. Сообщение Алисы во втором раунде.

□

I раунд	II раунд \ Входы	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Отправлял	Принял 0	0	1	–	–	0	1
	Принял 1	1	0	–	–	1	0
Принял 0	Принял 0	–	–	0	1	–	–
	Принял 1	–	–	1	0	–	–
Принял 1	Принял 0	–	–	1	0	–	–
	Принял 1	–	–	0	1	–	–

Таблица 3. Сообщение Боба в третьем раунде.