Полудуплексная коммуникационная сложность игры $\mathrm{KW}_{\mathrm{RecMaj}_k}$

Чернышов Игнат Максимович

4 июня 2024 г.

1 Введение

Алиса и Боб играют в следующую игру. Пусть X, Y и Z — конечные множества, функция $f\colon X \times Y \to Z$. Алиса знает только число $x \in X$, а Боб — только $y \in Y$, они хотят вычислить значение функции $f(x, y)$ при условии, что передавать они могут только 0 или 1 за один раунд.

Определение 1.1

Протокол общения — упорядоченное корневое дерево, для котрого верно следующее:

- Каждая вершина имеет пометку «А» или «Б»,
- Ребро в левого сына помечено нулём, в правого — единицей,
- Каждый лист содержит элемент из Z.

Несложно заметить, что любой игре Алисы и Боба соответствует протокол общения.

Определение 1.2

Сложность функции f, $C(f)$ — наименьшая глубина протокола для данной функции.

Определение 1.3

Игра Карчмера — Вигдерсона KW_f функции $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ — это следующая игра: Алиса получает $x \in f^{-1}(0)$, Боб $y \in f^{-1}(1)$, и они пытаются найти такое $i \in \{1, \dots, n\}$, что $x_i \neq y_i$.

Введём новые *полудуплексные коммуникационные модели*:

1. Алиса и Боб так же получают по числу из двух множеств и пытаются вычислить значение функции
2. Теперь каждый раунд выглядит так:
   - Алиса может либо *отправить «0» или «1»*, либо *слушать*.
   - Боб может либо *отправить «0» или «1»*, либо *слушать*.
   - Если они *отправили* одновременно, то их сообщения теряются.

- Если они одновременно *слушают*, то в модели с тишиной каждый из них *получает «символ тишины»*.
- Если они одновременно *слушают*, то в модели с нулём каждый из них *получает «0»*.

Сложность модели с тишиной обозначается как $C_т(f)$, а с нулём — $C_0(f)$.

Определим следующую функцию:

Определение 1.4

Рекурсивно задана функция $\mathrm{RecMaj}_k \colon \{0,1\}^{3^k} \to \{0,1\}$ для $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{RecMaj}_1(a,b,c) = \begin{cases} 0, a+b+c < 2 \\ 1, a+b+c \geq 2 \end{cases}$$

$$\mathrm{RecMaj}_{k+1}(a_1, \ldots, a_{3^{k+1}}) = \mathrm{RecMaj}_1(\mathrm{RecMaj}_k(a_1, \ldots, a_{3^k}),$$
$$\mathrm{RecMaj}_k(a_{3^k+1}, \ldots, a_{2\cdot 3^k}), \mathrm{RecMaj}_k(a_{2\cdot 3^k+1}, \ldots, a_{3^{k+1}}))$$

В данной статье будет оценена коммуникационная сложность игры Карчмера — Вигдерсона для данной функции в моделях с нулём и тишиной.

2 Результаты

Теорема 2.1

$C_0(\mathrm{KW}_{\mathrm{RecMaj}_k}) \leq 2\log_3 n$.

Доказательство. Докажем, что задачу можно решить за $2\log_3 n$. Воспользуемся троичным поиском по строке для поиска различного бита, покажем, что на каждую итерацию поиска потребуется не более чем 2 сообщения.

Алиса и Боб выбирают, в какую подстроку им перейти так, чтобы условие KW сохранилось. Строки игроков выглядящие $a_1, \ldots, a_{3^k}$ разобьются на:

1. $a_1, \ldots, a_{3^{k-1}}$,
2. $a_{3^{k-1}+1}, \ldots, a_{2\cdot 3^{k-1}}$,
3. $a_{2\cdot 3^{k-1}+1}, \ldots, a_{3^k}$.

Тогда возможные значения функции RecMaj_{k-1} на подстроках у Алисы:

0. (0, 0, 0),
1. (1, 0, 0),
2. (0, 1, 0),
3. (0, 0, 1).

В то время как у Боба:

0. (1, 1, 1),
1. (0, 1, 1),
2. (1, 0, 1),

3. $(1, 1, 0)$.

Таблица переходов Алисы и Боба в подстроку выглядит следующим образом:

Алиса \ Боб	0	1	2	3
0	2	2	3	2
1	2	2	3	2
2	3	3	1	1
3	2	2	1	1

В строках находятся соотвествующие индексы значений Алисы, в столбцах — Боба, и в ячейках хранится номер подстроки, в которую перейдут Алиса и Боб на следующем шаге.

Можем проверить, перебрав некоторые подтаблицы:

- $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$ подстрока (2) Алисы всегда имеет значение 0, а Боба 1.
- $\{2, 3\} \times \{2, 3\}$ подстрока (1) Алисы всегда имеет значение 0, а Боба 1.
- $\{2\} \times \{0, 1\} \cup \{0, 1\} \times \{2\}$ подстрока (3) Алисы всегда имеет значение 0, а Боба 1.
- $\{3\} \times \{0, 1\} \cup \{0, 1\} \times \{3\}$ подстрока (2) Алисы всегда имеет значение 0, а Боба 1.

Определим дерево итерации как дерево, где каждой вершине соответстует комбинаторный прямоугольник таблицы такой, что при любом входе строк Алисы и Боба из этого прямоугольника, путь будет проходить через данную вершину, а так же из каждой вершины могут выходить рёбра:

- $\overrightarrow{1}$ — отправить значение 1,
- $\overleftarrow{0}$ — получить значение 0,
- $\overleftarrow{1}$ — получить значение 1.

Построим в явном виде такие деревья для Алисы и Боба:

- Если по таблице Алиса и Боб окажутся в подстроке (1), то в первом раунде каждый будет *принимать* значения, значит все *получат «0»*, и по приведённому протоколу поймут куда им переходить.
- Если их пересечение не находится в подматрице $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$, то один из них точно знает куда они переходят, и если это (2), то он *принимает*, иначе *отправляет «1»*. Тот, кто не можнет однозначно понять, куда ему переходить, *принимает*. Тогда второй так же поймёт куда переходить.
- Если они находятся в пересечении $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$, то никто не может определить следующий шаг, они оба *принимают*. Для каждого из ситуация совпадает с предыдущим пунктом, когда, если игрок *принимает «0»*, то переходит в (2).

Значит, следуя этому протоколу, можно за 2 действия перейти к предыдущему шагу троичного поиска.

После каждой итерации строка сокращается в три раза, поскольку изначально строка имеет длину n, то спустя $\log_3 n$ итераций мы придём к биту различия. Это и есть решение $\mathrm{KW}_{\mathrm{RecMaj}_k}$ для модели с нулём. На каждый из $\log_3 n$ шагов выделялось не более чем 2 сообщения, значит суммарно было использовано не более $2\log_3 n$ сообщений.

$\square$

Следствие 2.1

$C_{\text{т}}(\mathrm{KW}_{\mathrm{RecMaj}_k}) \le 2\log_3 n$.

Доказательство. Мы уже знаем, что $C_{\text{т}}(\mathrm{KW}_f) \le C_0(\mathrm{KW}_f)$, и доказали $C_0(\mathrm{KW}_{\mathrm{RecMaj}_k}) \le 2\log_3 n$, значит, $C_{\text{т}}(\mathrm{KW}_{\mathrm{RecMaj}_k}) \le 2\log_3 n$. □

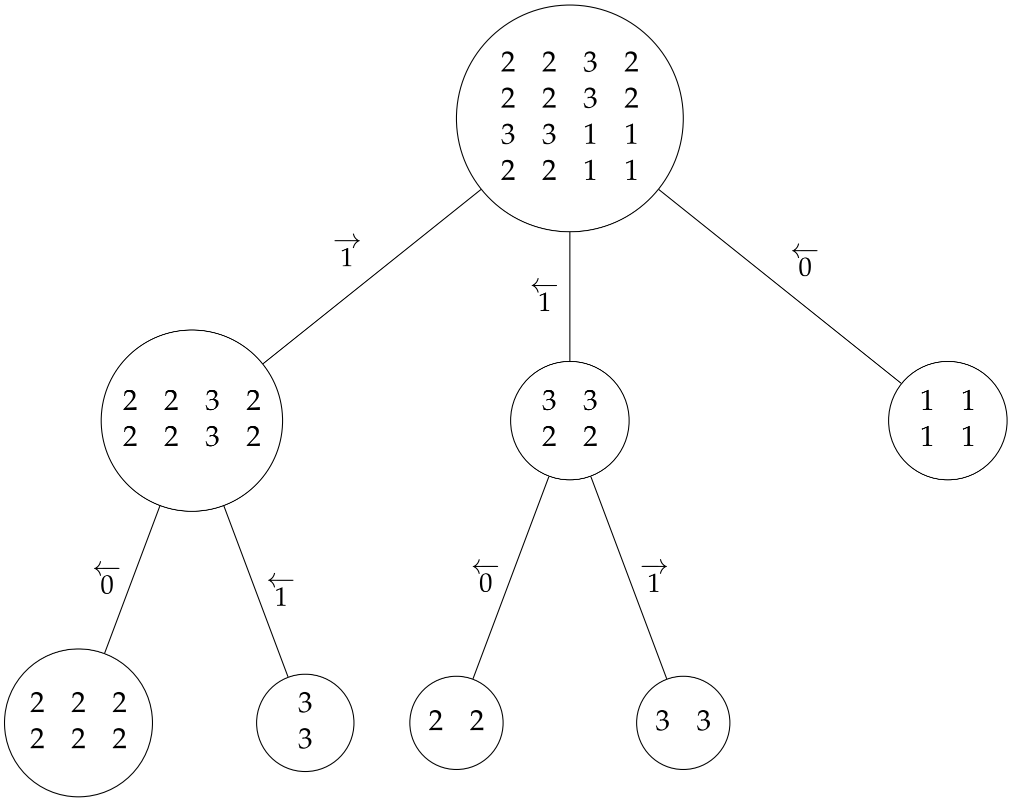

Рис. 1. Дерево Алисы

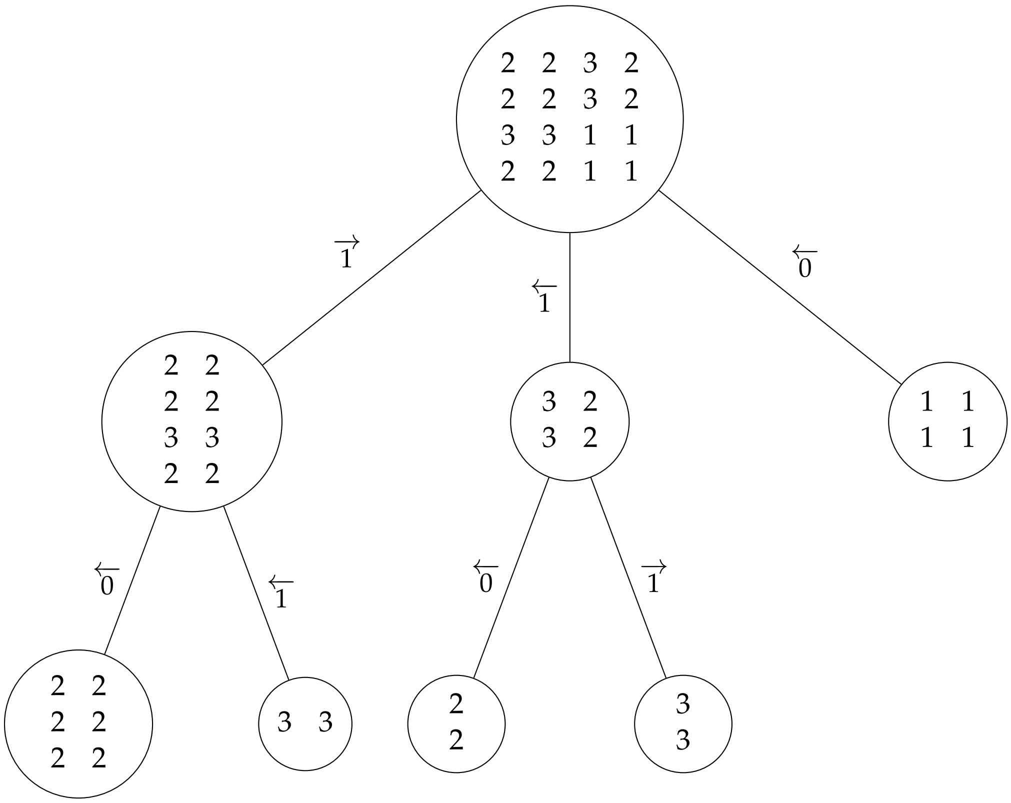

Рис. 2. Дерево Боба