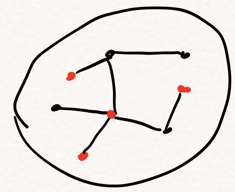
·) Подход к решению NP-hard задач - перечисление миним. мн-тв.

G - неор. граф

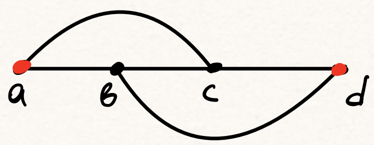
T - мн-во терминальных вершин в G



G

Def.
- Для мн-ва $T \subseteq V(G)$ мн-во $S \subseteq V(G)$ ⓝ <u>T-связным</u>, если $T \subseteq S$ и индуцированный подграф $G[S]$ связен.

T



$\{a, b, c, d\}$

$\{a, b, d\}$

$\{a, c, d\}$

- S ⓝ <u>минимальным T-связным</u>, если оно T-связно и $\exists\ S' \subsetneq S$ т.ч. S' - T-связно.

Enumeration of Minimal T-Connecting Sets
Input: A graph $G = (V, E)$ and a set $T \subseteq V$.
Output: All minimal T-connecting sets.

Цель 1
(!) # разл. мин. T-связн. мн-тв $\leq \binom{|V \setminus T|}{|T|-2} \cdot 3^{\frac{|V \setminus T|}{3}}$ для $|T| \leq n/3$

И научиться перечислять их.

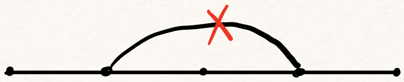
2-Disjoint Connected Subgraphs
Input: A connected graph $G = (V, E)$ and two disjoint subsets of terminal vertices $Z_1, Z_2 \subseteq V$.
Question: Does there exist a partition A_1, A_2 of V, with $Z_1 \subseteq A_1, Z_2 \subseteq A_2$ and $G[A_1]$, $G[A_2]$ both connected?

Цель 2
Применить к решению задачи 2-Disj Conn Subgraphs и получить улучшение $O^*(1{,}933^n) \longrightarrow O^*(1{,}7804^n)$

[Cygan 2012] [2013]

Def

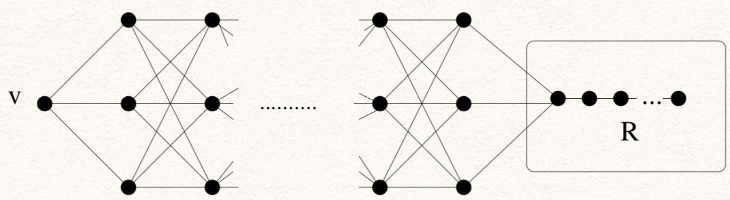
- Путь $P = (v_1 v_2 \ldots v_k) \subseteq G$ *индуцированным*, если $G[\{v_1, \ldots, v_k\}]$ не содержит других рёбер, кроме $(v_i v_{i+1})$.



- $N[S] = S \cup \{\text{соседи } S\}$
- $N(S) = N[S] \setminus S$
- $T \subset V$, $v_1 \in V \setminus T$, $P = (v_1 \ldots v_q)$ - индуц. путь в $G[V \setminus T]$

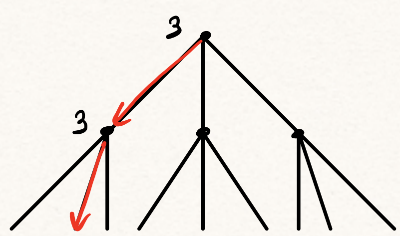
  Глубина ветвления пути P $b(P) = |N[\{v_1, \ldots, v_q\}]| - 1$

Theorem 1. *Given a graph $G = (V, E)$, a vertex $v \in V$ and $R \subseteq V \setminus N[v]$, we can enumerate all induced paths from v to a vertex of $N(R)$, with no intermediate vertex in $N[R]$, in time $O^*(3^{\frac{|V \setminus R|}{3}})$.*



Lemma 1. *Fix a non-negative integer t and let T be a rooted tree where any root-to-leaf path $v_1, v_2, \ldots, v_q$ has $\Sigma_{1 \le i \le q}\ c(v_i) \le t$, with $c(v)$ the number of children of node v. The maximum number of leaves that T can have is $l(t)$ with $l(1) = 1$ and for $t \neq 1$*

$$l(t) = \begin{cases} 3^i & \text{if } t = 3i, \\ 4 \cdot 3^{i-1} & \text{if } t = 3i + 1, \\ 2 \cdot 3^i & \text{if } t = 3i + 2. \end{cases}$$



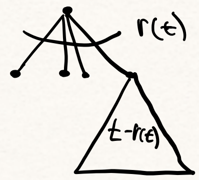
$t = 3 \cdot 2 \Rightarrow l(t) = 3^2 = 9$

Proof

1) $\forall t\ \exists$ дерево U_t с макс. # листьев и одинаковым $C(v_i)$ на каждом уровне.

$\exists\, T_t$ - достигает максимума листьев

$r(t) = C(\text{root } T_t)$



Построим U_t : $U(1) := r(t)$

↑ уровень в дереве U_t

$U(2) := r(t - U(1))$

$\vdots$

$U(i) := r\left(t - \sum_{j<i} U(j)\right)$

$\Rightarrow$ В U_t и T_t одинак. # листьев.

2) $\forall U_t$, p уровней $\quad U(1)+U(2)+\ldots+U(p-1)=t$

$\Rightarrow$ # листьев $= U(1)\cdot U(2)\cdot\ldots\cdot U(p-1)$

НУО $U(i) < 4$, т.к. $2\cdot(x-2) \geq x$ для $x \geq 4$.

А так же, если есть 2, то оно встреч. не более чем дважды, т.к.

$3\cdot 3 > 2\cdot 2\cdot 2$

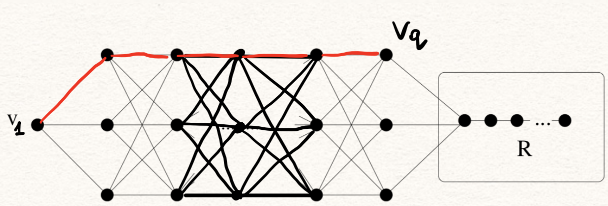
$\blacksquare$

Lemma 2. *Given a graph $G = (V, E)$, a vertex $v_1 \in V$, $R \subseteq V \setminus N[v_1]$, and an integer t. Then there exist at most $l(t)$ induced paths $P = (v_1, v_2, ..., v_q)$ in G such that*

- $b(P) \leq t$,
- $v_i \notin N[R]$ *for* $1 \leq i \leq q-1$, *and*
- $v_q \in N(R)$.

And we can enumerate in $O^*(3^{t/3})$ time.

Proof.



$b(P) = |N[P]| - 1$

$v_2 \in N(v_1)$

$v_i \notin N(R) \Rightarrow$

$\Rightarrow v_{i+1} \in N(v_i) \setminus N[\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}]$

$v_i \in N(R) \Rightarrow$ пришли в лист.

$\forall$ дерево выборов T

узлы T помечены выбранными верш.

$\exists\ P = (v_1 \dots v_q)$. $\ast\ P_T$ - путь от корня до листа в T, соотв. P.

$\Rightarrow \sum_{P_T} C(\text{узел } P_T) = B(P)$.

$\ell(t) \le 3^{t/3}$ $\blacksquare$

Для $|R|=1$ Thm. решает задачу Enum. min. T-conn. set при $T=\{u,v\}$

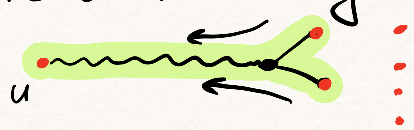
Lemma 3. *Given $G = (V, E)$, $T \subseteq V$, and two vertices $u, v \in T$ such that $uv \in E$. Let G' be the graph obtained by contracting edge uv into v. Then there is a one to one mapping between Minimal T-Connecting Sets in G and Minimal $T \setminus \{u\}$-Connecting Sets in G'.*

$S \subseteq G \longrightarrow S' = S \setminus \{u\} \subseteq G'$

$G[S' \cup \{u\}] \longleftarrow S' \subseteq G'$ $\blacksquare$

Идея работы алгоритма

- фикс. $u \in T$ и находим все инд. пути $u \rightsquigarrow N(T \setminus \{u\})$



- возьмём один, стянем в u. Повторим на G'.

Algorithm Main Enumeration
Input: A graph $G = (V, E)$ and terminal set $T \subseteq V$
Output: A family of sets containing all Minimal T-Connecting Sets
begin
  assign each vertex a unique *label* between 1 and $|V|$
  choose $u \in T$
  MCS$(\emptyset, \emptyset)$
end

Procedure MCS(C, X)
Parameter C: vertex set used to connect T
Parameter X: vertices not to explore in this call
begin
if $G[T \cup C]$ is connected then **output** $T \cup C$
else
  set $C_u \supseteq C$ as vertex set of connected component of $G[T \cup C]$ containing u
  set $T' = T \setminus C_u$ i.e. the terminals not yet connected to u by C
  set G' to be graph obtained from G by contracting edges of $G[C_u]$ to u
  call the algorithm of Lemma 2 on $G'[V(G') \setminus X]$ with $v_1 = u$ and $R = T'$
  for every path $P = (v_1, v_2, \ldots, v_q)$ output by that call
    MCS$(C \cup \{v_2, \ldots, v_q\},\ X \cup \{w \in N(C_u) : label(w) < label(v_2)\})$
  end-for
end

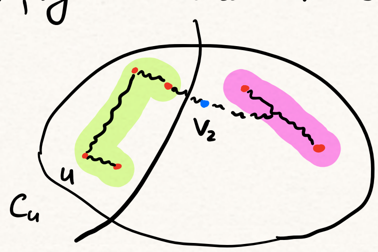
Lemma 4. *Given $G = (V, E)$, $T \subseteq V$ and $|T| \leq n/3$ Algorithm Main Enumeration will:*

1. *output every Minimal T-Connecting Set of G,*
2. *output, for any integer $r \in [0..|V \setminus T|]$, at most $\binom{|V \setminus T|}{|T|-2} \cdot 3^{r/3}$ vertex sets $S \supseteq T$ such that $|N[S] \setminus T| \leq r$, and*
3. *run in $O^*(\binom{|V \setminus T|}{|T|-2} \cdot 3^{|V \setminus T|/3})$ time.*

<u>Proof.</u>

1) Для $|T|=1$ очевидно
$\exists$ S - мин. T-связн. мн-во. Будет вызов $MCS(C,X)$: $C \cup X = S$.
$\begin{cases} T \cup C \subseteq S \\ S \cap X = \emptyset \end{cases}$ $\nless$ вызов $MCS(C,X)$, где максим. $|T \cup C|$
$\exists$ $T' = T \setminus C_u \neq \emptyset$

$v_2 \in N(C_u) \cap S$ - с мин. номером



$G[S]$ - связн., $G[S\setminus v_2]$ - не связн.

=> для $S' = (S\setminus C_u)\cup\{u\}$ $G'[S']$ - связн., $G'[S'\setminus v_2]$ - не связн.

$v_2 \notin C \sqcup T$ => кажд. комп. св-ти $G'[S'\setminus v_2]$ содерж. верш. из T!

$\exists$ B - та комп-та, что не содержит u.

=> запуск на G', $R=T'$ выдаст путь $P=(u v_2 - v_q) \subseteq S$

и v_q – сосед вершины из T' в B и содержит из $N(C_u)$

только v_2 => $C \rightsquigarrow C\cup\{v_2,\dots,v_q\}$

В X не добавится ничего из S, т.к.

у v_2 наименьший номер

Противоречие макс. $|T\cup C|$ => $T\cup C = S$

2) Д-м, что для $r = |N[C_u]\setminus T|$ и $p = \#$ раз, которое добавлялись пути в C

Число рекурсивных вызовов $MCS(S,X) \le \binom{|X|+p}{p-1}\cdot 3^{r/3}$

p - глубина рекурсии

$x = |X|$ $\qquad p \le |C|$; $\quad p \le |T|-1$

$x+p \le |N[C_u]\setminus T| = r$

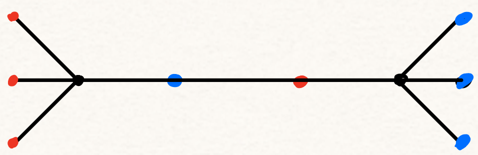
$|T| \le n/3$, $|V\setminus T| \ge 2|T|$ => $\binom{|V\setminus T|}{|T|-2} \ge \binom{x+p}{p-1}$

Индукцией по $l = x+p$.

$\blacksquare$

Theorem 2. *For an n vertex graph $G=(V,E)$ and a terminal set $T\subseteq V$ where $|T|\le n/3$ there is at most $\binom{n-|T|}{|T|-2}\cdot 3^{(n-|T|)/3}$ minimal T-connecting vertex sets and these can be enumerated in $O^*(\binom{n-|T|}{|T|-2}\cdot 3^{(n-|T|)/3})$ time.*

2-Disjoint Connected Subgraphs
Input: A connected graph $G = (V, E)$ and two disjoint subsets of terminal vertices $Z_1, Z_2 \subseteq V$.
Question: Does there exist a partition A_1, A_2 of V, with $Z_1 \subseteq A_1, Z_2 \subseteq A_2$ and $G[A_1]$, $G[A_2]$ both connected?



Theorem 3. *There exists a polynomial space algorithm that solves the* 2-Disjoint Connected Subgraphs *problem in* $O^*(1.7804^n)$ *time.*

<u>Proof</u> ⅃ $|Z_1| < |Z_2|$ и $\alpha := \frac{|Z_1|}{n}$ $0 < \alpha \leq 0{,}5$ $\alpha_0 = 0.0839$

I)
- ⅃ $\alpha \leq \alpha_0$ ∡ $G[V \setminus Z_2]$ и ищем кандидатов для A_1.

$|Z_2| \geq \alpha \cdot n$ $\binom{n - |Z_1| - |Z_2|}{|Z_1| - 2} \cdot 3^{(n-|Z_1|-|Z_2|)/3} \leq \binom{(1-2\alpha)n}{\alpha n - 2} \cdot 3^{(1-2\alpha)n/3}$

max при $\alpha_0 = 0{,}0839$ и $\leq 1{,}7804^n$.

- ⅃ $\alpha > \alpha_0$ Тогда переберём все подмн. $V \setminus (Z_1 \cup Z_2)$
  Их $\leq 2^{n(1-2\alpha)} \leq 1{,}7804^n$

II) Для каждого кандидата A проверим, что все верш. Z_2 лежат в одной комп. св-ти $G \setminus A$ ∎