Fixed-parameter tractable (FPT)

$f(k) \cdot n^c$, c – const.

k – параметр

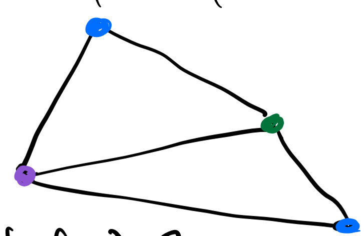
XP, slice-wise polynomial

$f(k) \cdot n^{g(k)}$

Раскраска графа

G, k – кол-во цветов

правильно раскрасить в k цветов.



$k=3$

$f(3) \cdot poly(n)$?

если $P \neq NP$, то нет fpt-алгор.

Задача о клике

G, k, найти $K_k \subseteq G$.

Можно за n^k.

fpt-алгоритм неизвестен.

Vertex Cover

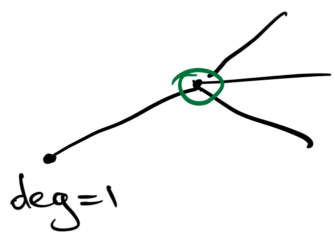
G, k. Найти $S \subseteq V$, в $G - S$ нет ребер.
$|S| \le k$

Решение за $2^k \cdot poly(n)$.

Улучшение.

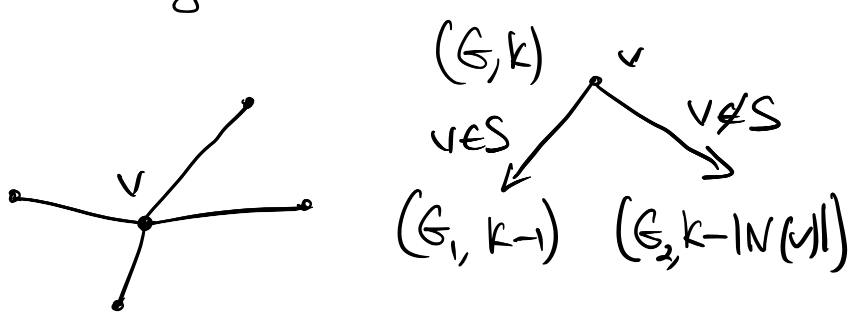
1) Удалим все изолированные вершины.

2)



вершина степени 1, берем её соседа.

3)



$$T(k) \le T(k-1) + T(k-2)$$

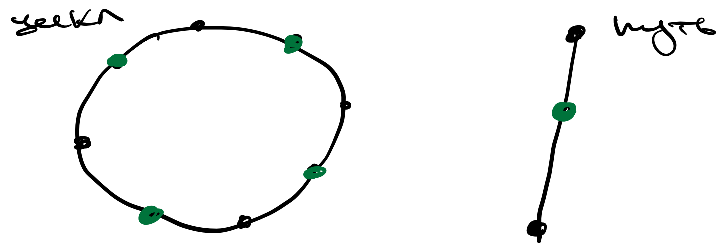
$$O(1{,}61^k \cdot poly(n)).$$

Можно ли

$$T(k) \le T(k-1) + T(k-3) \ ?$$

max степень в $G \ge 3$.

пусть макс. степень 2.



Каждая вторая вершина в S.

$$O(1{,}47^k \cdot poly(n)).$$

Measure and conquer

Относительно n.

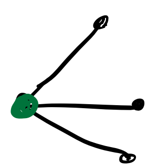
$$T(n) \le T(n-1) + T(n-4).$$

Сделаем $c^{n'}$, $n' \le n$

$n = n_0 + n_1 + n_2 + \dots$, n_i — кол-во верш. ст. i.

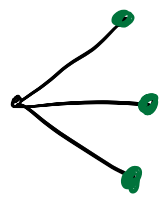
$$n' = \frac{1}{2} n_2 + n_3 + n_4 + \dots$$

I) макс. степень 3.

1) 

мера меняется на -1, $-\frac{3}{2}$.

2)



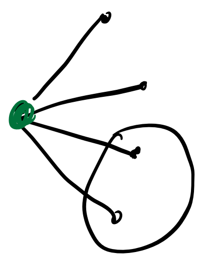
мера уменьшилась ~~хотя бы~~ на

-1, $\frac{-3}{2}$.

$$T(n') \le T(n' - 2{,}5) + T(n' - 2{,}5).$$

II) макс. степень ≥ 4.

1)

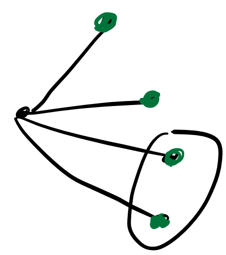


а верш. ст. 2

-1

$-1 - a/2$

2)



а верш. ст. 2.

$-1 - 0{,}5 \cdot 4 = -3$.

$-\left(1 + a/2 + (4-a)\right)$

$-\left(5 - a/2\right)$

$$T(n') \le T(n'-1) + T(n'-5).$$

Ядро

Задача (I, k).

Kernelization algorithm A.

1) A — полин. время от $|I|$.
2) A возвр. (I', k') — эквив. (I, k).
3) $|I'| \le f(k)$, $k' \le g(k)$

f, g — выч. ф-ции.

$f(k) + g(k)$ — размер ядра.

Утв. Задача (разреш.) допускает fpt алгор. $\Leftrightarrow$ $\exists$ ядро

Док-во

$\Leftarrow$ $(I, k) \xrightarrow{A\text{-}poly(I)} (I', k')$, $|I'| \leq f(k)$.

Решение за $h(f(k)) + poly(I) \leq$

$\leq h(f(k)) \cdot poly(I)$. ← fpt.

$\Rightarrow$ есть алгоритм A с врем. $f(k) \cdot n^c$, (I, k).

1) Запустим алгоритм A на время n^{c+1}.

A выдал ответ, тогда выдаем

(I_1, k_1) — yes-инст.

(I_2, k_2) — No-инст.

A не завершил работу, то

$f(k) n^c > n^{c+1} \Rightarrow f(k) > n$.

Выдаем $(I', k') = (I, k)$

$|I'| = |I| < f(k)$

$k' = k \leq k$, $g(k) = k$

Полин. ядро

$f(k) + g(k)$ — poly от k.

$$\left(\text{задачи с полин. ядрами}\right) \subseteq FPT = \left(\text{задачи с ядром}\right)$$

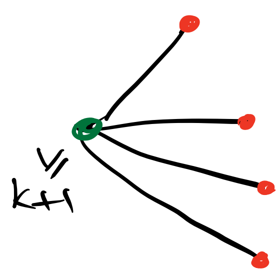
Ядро для Vertex Cover

есть $2^k \cdot \mathrm{poly}(n)$ — алгоритм $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ядро $(2^k + k)$ ← плохо.

Ядро $O(k^2)$.

1)



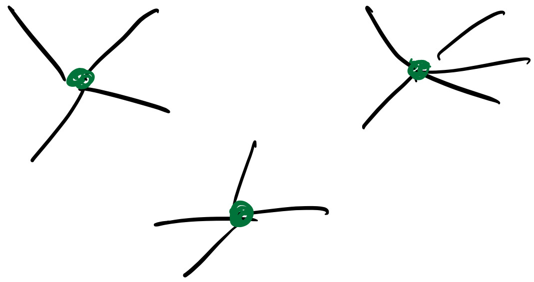
верш. ст. $\geq k+1$ в верш. покр. иначе ответ „нет".

2) Удаляем все изолир. вершины.

3) получаем граф с макс. ст. $\leq k' \leq k$

$(G, k) \longrightarrow (G', k')$ ← после 1 и 2.

если $|E(G')| > k'^2$, то ответ „нет".



k' верш. в V.C.

и ст. $\leq k'$

$\Rightarrow$ не более k'^2 ребер.

$$\Rightarrow |E(G')| = O(k'^2) = |V(G')|$$