CS Space

Вероятностное моделирование

лекция 3

Артур Игнатьев
CS Space, МКН СПбГУ, ИТМО

Владимир Евменов
CS Space, Huawei

Информация по Хартли

- A — конечное множество
- Информация в элементе A: $\chi(A) = \log|A|$ бит
- X, Y — конечные множества
- $\pi_X : X \times Y \to X, \pi_X : (x, y) \mapsto x$
- $A \subseteq X \times Y$
- Информация в X-компоненте элемента A: $\chi_X(A) = \chi(\pi_X(A))$
- $\chi_X(A), \chi_Y(A) \leq \chi(A) \leq \chi_X(A) + \chi_Y(A)$

Информация по Хартли

- Условная информация в Y-компоненте элемента A при заданной X-компоненте $\chi_{Y|X}(A) = \log \max_{x \in X} |\pi_X^{-1}(x) \cap A|$

Свойства.

- $\chi_{Y|X}(A) \leq \chi_Y(A)$
- $\chi(A) \leq \chi_X(A) + \chi_{Y|X}(A)$
- Последнее неравенство хотелось бы превратить в равенство

Отгадай число

- **Пример.** Отгадать число из $[n]$ за минимальное количество вопросов «да/нет» a) адаптивно, b) неадаптивно.

a) Бинарный поиск за $\lceil \log n \rceil$ вопросов

b) Биты двоичной записи за $\lceil \log n \rceil$ вопросов

- **Утверждение.** Для однозначного отгадывания числа необходимо и достаточно $\lceil \log n \rceil$ вопросов.

- $\chi_{[n]\|Q}(S) = \log 1 = 0$
- $\chi_Q(S) \le \chi_{Q_1}(S) + \ldots + \chi_{Q_k}(S) \le k$
- $\log n = \chi([n]) \le \chi(S) \le \chi_{[n]\|Q}(S) + \chi_Q(S) \le k$

Отгадай число — бюджет

- **Пример.** Отгадать число из $[n]$ за минимальный бюджет, если каждый ответ «да» стоит 1 рубль, а «нет» — 2 рубля
- При оптимальной стратегии
  - Ответ «нет» дает в два раза больше информации
  - Иначе противник может выдавать меньше информации/деньги

Фальшивая монетка

- **Пример.** Среди n монет имеется одна фальшивая, она тяжелее или легче остальных. Имеются чашечные весы, на которых можно сравнить два произвольных подмножества (результат $=$, $>$, $<$). Требуется найти фальшивую монетку за минимальное количество взвешиваний.

- k взвешиваний

- $Q = Q_1 \times \ldots \times Q_k$, где $Q_i = \{ = , > , < \}$ — результат взвешивания i

- Пространство событий $S \subseteq [n] \times Q$

Фальшивая монетка

- **Утверждение.** При $n = 30$ для нахождения фальшивой монетки недостаточно 3 взвешиваний.
- $\log 30 = \chi([30]) \leq \chi(S) \leq \chi_{[30]|Q}(S) + \chi_Q(S) \leq 3 \log 3$
- **Утверждение.** При $n = 15$ для нахождения фальшивой монетки недостаточно 3 взвешиваний.
- При любом исходе, кроме $(= , = , =)$, однозначно определяется номер фальшивой монеты и тяжелее или легче она
- $C = \{[14] \times \{ > , < \}\} \cup \{15\}$
- $\log 29 = \chi(C) \leq \chi(S) \leq \chi_{C|Q}(S) + \chi_Q(S) \leq 3 \log 3$

Фальшивая монетка

- При $n = 14$ для нахождения фальшивой монетки недостаточно 3 взвешиваний
- Узнаем позже. Надо улучшить определение информации

Информация по Шеннону

- A — конечное множество
- $X : a \to p(a)$ — распределение вероятностей на A
- Энтропия $H(X) = \sum_{a \in A} p(a) \log \frac{1}{p(a)} \geq 0$
- По непрерывности, доопределяем $0 \log 0 = 0$
- Можно думать об этом как о случайной величине

Свойства энтропии

- $H(X) \geq 0$
- $H(X) \leq \log |A|$
- $H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$
- $H(X_1, \ldots, X_n) \leq H(X_1) + \ldots + H(X_n)$

Условная энтропия

- A — конечное множество, $C \subseteq A$
- $H(X\,|\,C)$ — энтропия X при условии события C
- (X, Y) — совместное распределение на $A \times B$
- Условная энтропия $H(X\,|\,Y) = \sum_b p(b)H(X\,|\,b) =$

$$= -\sum_b p(b) \sum_a p(a\,|\,b) \log p(a\,|\,b) =$$

$$= -\sum_b p(b) \sum_a \frac{p(a,b)}{p(b)} \log \frac{p(a,b)}{p(b)}$$

- Взаимная информация в Y относительно X
$I(X : Y) = H(Y) - H(Y\,|\,X)$

Свойства условная энтропия

- Условная энтропия $H(X \mid Y) \geq 0$
- Равенство при $X = f(Y)$ с вероятностью 1 для некоторой функции f
- $H(X \mid Y) \leq H(X)$
- $H(X \mid Y, Z) \leq H(X \mid Y)$
- Цепное правило: $H(X, Y) = H(X) + H(Y \mid X)$
- $H(X_1, X_2, \ldots, X_n) = H(X_1) + H(X_2 \mid X_1) + \ldots + H(X_n \mid X_1, \ldots, X_{n-1})$

Фальшивая монетка

- **Утверждение.** При $n = 14$ для нахождения фальшивой монетки недостаточно 3 взвешиваний.

- Пусть при исходе $(= , = , =)$ фальшивая монета под номером 14

- Зададим распределение X

  $$p(1, \uparrow) = p(1, \downarrow) = \ldots = p(13, \downarrow) = p(14, \updownarrow) = \frac{1}{27}$$

- $H(X) = \log 27 = 3 \log 3$

- $H(X) \leq H(X, Q) = H(X \mid Q) + H(Q) = 0 + H(Q) \leq$
  $\leq H(Q_1) + H(Q_2) + H(Q_3)$

- $H(Q_i) \leq \log 3$

- Значит, $H(Q_1) = H(Q_2) = H(Q_3) = \log 3$

Фальшивая монетка

- Тогда $Q_1 : p(>) = p(=) = p(<) = \frac{1}{3}$
- Пусть на шаге Q_1 кладется k монет в каждую чашу
- Тогда $\frac{1}{3} = p(<) = \frac{2k}{27}$, значит $k = 4.5$. Противоречие.

Неравенство Шерера

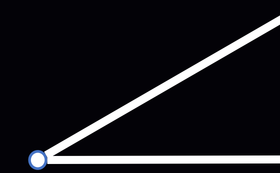
- $2H(X, Y, Z) \leq H(X, Y) + H(X, Z) + H(Y, Z)$
- $H(X, Y, Z) = H(X, Y) + H(Z \mid X, Y) \leq H(X, Y) + H(Z \mid X)$
- $H(X, Y, Z) = H(X, Y) + H(Z \mid X, Y) \leq H(X, Y) + H(Z \mid Y)$
- $2H(X, Y, Z) \leq 2H(X, Y) + H(Z \mid X) + H(Z \mid Y) \leq$
  $\leq H(X, Y) + H(X) + H(Y) + H(Z \mid X) + H(Z \mid Y) =$
  $= H(X, Y) + H(X, Z) + H(Y, Z)$

Неравенство Лумис—Уитни

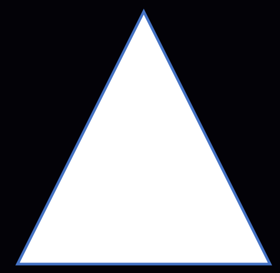
- X, Y, Z — конечные множества
- $\pi_X : (x, y, z) \mapsto x$
- $\pi_{XY} : (x, y, z) \mapsto (x, y)$
- $A \subseteq X \times Y \times Z$
- Неравенство Лумис—Уитни
  - $\log |A| \leq \log |\pi_X(A)| + \log |\pi_Y(A)|$
  - $2 \log |A| \leq \log |\pi_{XY}(A)| + \log |\pi_{XZ}(A)| + \log |\pi_{YZ}(A)|$

Углы и треугольники в графе

- $G = (V, E)$ — ориентированный граф без петель и кратных ребер
- Угол: $(x, y, z) \in V^3$ и $(x, y), (x, z) \in E$



- Треугольник: $(x, y, z) \in V^3$ и $(x, y), (y, z), (z, x) \in E$



- **Утверждение.** Количество треугольников в графе G не более количества углов.
- Пусть (X, Y, Z) — равномерное распределение на треугольниках G
- $H(X, Y, Z) = H(X) + H(Y | X) + H(Z | X, Y) \leq H(X) + H(Y | X) + H(Z | Y)$
- $H(Y | X) = H(Z | Y)$
- $H(X, Y, Z) \leq H(X) + 2H(Y | X)$

Углы и треугольники в графе

- $(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})$ — распределение на углах
- $x, y, z \in V$
- x в $\tilde{X}$ с той же вероятностью, что и в X
- (x, y) в $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ с той же вероятностью, что и в (X, Y)
- (x, z) в $(\tilde{X}, \tilde{Z})$ с той же вероятностью, что и в $(\tilde{X}, \tilde{Y})$
- При заданном x, ребра (x, y), (x, z) берутся независимо

Углы и треугольники в графе

- $H(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = H(\tilde{X}) + H(\tilde{Y} | \tilde{X}) + H(\tilde{Z} | \tilde{X}, \tilde{Y}) =$
  $= H(\tilde{X}) + H(\tilde{Y} | \tilde{X}) + H(\tilde{Z} | \tilde{X})$
- $H(\tilde{Y} | \tilde{X}) = H(\tilde{Z} | \tilde{X})$
- $H(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = H(\tilde{X}) + 2H(\tilde{Y} | \tilde{X}) = H(X) + 2H(Y | X) \geq$
  $\geq H(X, Y, Z)$
- $\log | \angle | \geq H(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \geq H(X, Y, Z) = \log | \triangle |$