P 1. Пусть в матрице функции $f\colon \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ все строки различны. Докажите, что $C(f) \geq \log n$.

Определение 1

Пусть $f\colon X \times Y \to Z$ и μ — распределение на $X \times Y$. Заметим, что для любого коммуникационного протокола Π для функции f распределение μ индуцирует распределение на листьях данного протокола естественным образом. **Внешней информационной стоимостью** (или внешним информационным разглашением) протокола Π по распределению μ будем называть величину:

$$\mathrm{IC}_\mu^{\mathrm{ext}}(\Pi) = I(\Pi(X,Y) : X, Y).$$

Внутреннее информационное разглашение протокола Π на распределении μ:

$$\mathrm{IC}_\mu^{\mathrm{int}}(\Pi) = I(\Pi(X,Y) : X \mid Y) + I(\Pi(X,Y) : Y \mid X).$$

Также определим внешнюю информационную сложность самой функции $\mathrm{IC}_\mu^{\mathrm{ext}}(f) = \min_\Pi \mathrm{IC}_\mu^{\mathrm{ext}}(\Pi)$.

P 2. Докажите, что для любой булевой функции f и любого распределения μ существует такой протокол Π для KW_f, что $\mathrm{IC}_\mu^{\mathrm{int}}(\Pi) \leq 2\log n$.
Подсказка: попробуйте рассмотреть прокол, где Алиса пересылает Бобу биты входа до тех пор, пока они не найдут бит различия.

P 6.3. Построить распределение вероятностей на парах (x, y), обладающее следующим свойством. Любой коммуникационный протокол, вычисляющий функцию EQ, в среднем передает не менее n битов.

P 6.5. Покажите, что $\mathrm{R}^{\mathrm{pub}}_{\frac{1}{10}}(\mathrm{EQ}) = \mathcal{O}(1)$.

P 6.6. Докажите, что $\mathrm{R}^{\mathrm{pub}}_{\frac{1}{10}}(\mathrm{GT}) = \mathcal{O}(\log n \cdot \log\log n)$.

P 4.2. *Обобщенное неравенство Фано.* Пусть случайная величина α принимает значения в некотором n элементном множестве A. Пусть значение случайной величины β принадлежит A с вероятностью p, причём условная вероятность события $\alpha \neq \beta$ при условии $\beta \in A$ равна ε. Докажите, что выполняется неравенство:

$$H(\alpha \mid \beta) \leq (1-p)\log n + p\varepsilon\log(n-1) + ph(\varepsilon).$$

P 3.4. Пусть $G = (V, E)$ неориентированный граф, t — число треугольников и ℓ — число ребер. Докажите, что $(6t)^2 \leq (2\ell)^3$.

P 1.7. Даны две группы камешков, причем камешки в каждой группе упорядочены по весу. В первой группе n камешков, а во второй — m. Требуется упорядочить все камешки по весу. Придумайте способ, решающий эту задачу за менее чем $m\log n$ взвешиваний при больших n.