P 1. Пусть Алиса и Боб получают битовые строки длины n и хотят вычислить функцию $\mathrm{MAX}(x, y)$. Докажите, что:

a) $C(\mathrm{MAX}) \leq \frac{3}{2}n + \mathcal{O}(1)$,

b) $C(\mathrm{MAX}) \leq n + o(n)$.

Определение 1 (Коммуникационная сложность в среднем)

Раньше мы интересовались, сколько битов требуется передать в худшем случае, чтобы вычислить данную функцию $f(x, y)$. То есть, сложность коммуникационного протокола определялась, как его глубина (длина максимального пути от корня к листу). Теперь же будем интересоваться количеством битов, передаваемым протоколом в среднем, где усреднение происходит по некоторой вероятностной мере на парах (x, y).

Итак, зафиксируем некоторое распределение μ вероятностей на на парах (x, y). Средним количеством переданных битов для данного протокола Π называется сумма

$$\sum_{(x,y)\in X\times Y} \mu(x, y) c_\Pi(x, y),$$

где $c_\Pi(x, y)$ обозначает количество переданных протоколом Π битов на входах x, y.

Мерой множества пар будем называть сумму всех вероятностей пар из R, обозначим за $\mu(R)$. Через α_μ будем обозначать максимальную меру одноцветного для f прямоугольника.

P 2. Для любого распределения вероятностей μ среднее количество битов переданных любым протоколом Π вычисления f не меньше $-\log \alpha_\mu$.

P 3. Построить распределение вероятностей на парах (x, y), обладающее следующим свойством. Любой коммуникационный протокол, вычисляющий функцию EQ, в среднем передает не менее n битов.

P 4. Постройте детерминированный коммуникационный протокол, который вычисляет функцию GT, передавая в среднем константу битов. Функция $\mathrm{GT}(x, y)$ определена на парах x, y целых чисел в интервале $\{0, \ldots, 2^n - 1\}$ и принимает значение 1, если $x > y$, и значение 0, иначе. Говоря о среднем, мы имеем в виду, что x, y выбираются случайно и независимо среди всех чисел указанного интервала с равномерным распределением.

Определение 2 (Вероятностная коммуникационная сложность)

Пусть у Алисы и Боба есть доступ к общей последовательности случайных битов r. Теперь они знают, что их партнер видит ту же последовательность r, и действие каждого игрока в вершине протокола зависит от его входа, предыдущей коммуникации и последовательности r. *Вероятностной коммуникационной сложностью функции f с публичными битами r* называется следующая величина:

$$\mathrm{R}_{\varepsilon}^{\mathrm{pub}}(f) = \min_{\Pi} \max_{(x,y)} (\sharp\text{переданных битов}),$$

где протоколы Π удовлетворяют условию $\Pr_r[\Pi(x,y) \neq f(x,y)] \leq \varepsilon$. Количество переданных бит считается в худшем случае по всем случайным битам r, но большой разницы нет, если вместо этого считать матожидание.

P 5. Покажите, что $\mathrm{R}_{\frac{1}{10}}^{\mathrm{pub}}(\mathrm{EQ}) = \mathcal{O}(1)$.

P 6. Докажите, что $\mathrm{R}_{\frac{1}{10}}^{\mathrm{pub}}(\mathrm{GT}) = \mathcal{O}(\log n \cdot \log\log n)$.

P 5.5. У Алисы имеется n-битная строка x, а у Боба n-битная строка y. Известно, что y получен из x инвертированием одного бита.

a) Придумайте детерминированный коммуникационный протокол сложности $\mathcal{O}(\log n)$, который позволяет Бобу узнать x.

b) Придумайте однораундовый детерминированный коммуникационный протокол сложности $\mathcal{O}(\log n)$, который позволяет Бобу узнать x. (В однораундовом протоколе Алиса посылает некоторое сообщение Бобу, после чего Боб вычисляет результат).

P 4.2. *Обобщенное неравенство Фано.* Пусть случайная величина α принимает значения в некотором n элементном множестве A. Пусть значение случайной величины β принадлежит A с вероятностью p, причём условная вероятность события $\alpha \neq \beta$ при условии $\beta \in A$ равна ε. Докажите, что выполняется неравенство:

$$H(\alpha \mid \beta) \leq (1-p)\log n + p\varepsilon \log(n-1) + ph(\varepsilon).$$

P 3.4. Пусть $G = (V, E)$ неориентированный граф, t — число треугольников и ℓ — число ребер. Докажите, что $(6t)^2 \leq (2\ell)^3$.

P 1.7. Даны две группы камешков, причем камешки в каждой группе упорядочены по весу. В первой группе n камешков, а во второй — m. Требуется упорядочить все камешки по весу. Придумайте способ, решающий эту задачу за менее чем $m \log n$ взвешиваний при больших n.