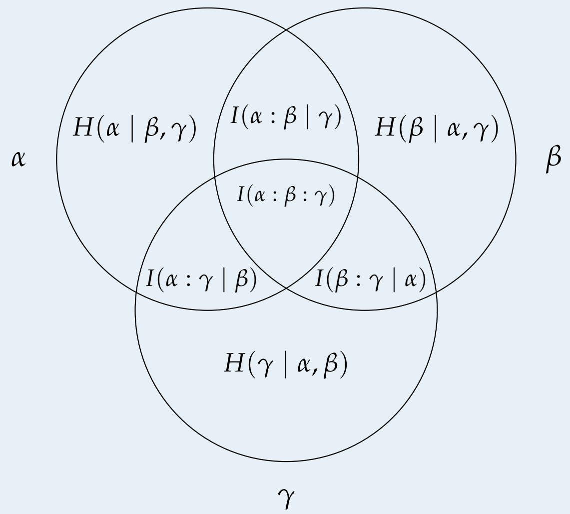
P 1. Пусть α, α' две независимые одинаково распределенные величины. Докажите, что $\Pr[\alpha = \alpha'] \geq 2^{-H(\alpha)}$.

Определение 1

Определим общую информацию трех случайных величин:

$$I(\alpha : \beta : \gamma) = I(\alpha : \beta) - I(\alpha : \beta \mid \gamma).$$

Соотношения на информационные величины имеют удобную геометрическую интерпретацию. Давайте нарисуем три круга Эйлера и сопоставим площади каждой из получившихся замкнутых области некоторую информационную величину.



P 2. Докажите неравенство или предъявите контрпример к нему:

a) $H(\alpha \mid \beta) + H(\alpha \mid \gamma) \leq H(\alpha) + H(\alpha \mid \beta, \gamma) + I(\beta : \gamma \mid \alpha)$,

b) $H(\gamma) \leq I(\alpha : \gamma) + I(\beta : \gamma) + H(\gamma \mid \beta, \alpha)$.

P 3. Пусть энтропия случайной величины a равна n, а взаимная информация пар a и b, а также a и c больше $3n/4$. Докажите, что $I(b : c) > n/2$.

P 4. Пусть $G = (V, E)$ неориентированный граф, t — число треугольников и ℓ — число ребер. Докажите, что $(6t)^2 \leq (2\ell)^3$.

P 1.2. Для множества $A \subseteq \mathbb{N}^3$ будем обозначать $\pi_{ij}(A)$ проекцию A на координатную плокость, задаваемую осями i, j (индексы $i, j \in [3]$). Докажите, что для любого конечного A выполняется:

$$2 \log |A| \leq \log |\pi_{12}(A)| + \log |\pi_{13}(A)| + \log |\pi_{23}(A)|.$$

P 1.3. Для множества $A \subseteq \mathbb{N}^4$ будем обозначать $\pi_{ij}(A)$ проекцию A на координатную плокость, задаваемую осями i, j, k (индексы $i, j, k \in [4]$). Докажите, что для любого конечного A выполняется:

$$3\log|A| \leq \log|\pi_{123}(A)| + \log|\pi_{124}(A)| + \log|\pi_{134}(A)| + \log|\pi_{234}(A)|.$$

P 1.7. Даны две группы камешков, причем камешки в каждой группе упорядочены по весу. В первой группе n камешков, а во второй — m. Требуется упорядочить все камешки по весу. Придумайте способ, решающий эту задачу за менее чем $m \log n$ взвешиваний при больших n.

P 2.5. Неравенство Шерера. Пусть $T_1, \ldots, T_k$ — произвольные кортежи, составленные из переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, причем каждая переменная входит ровно в r кортежей. Докажите, что $rH(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leq H(T_1) + \ldots + H(T_n)$.