P 1. Пусть $\sum p_i = 1$ и все $p_i > 0$. Определим функцию $h(p) = \sum p_i \log \frac{1}{p_i}$. К чему стремится значение этой функции для следующих последовательностей:

a) $1/2, 1/4, 1/8, \ldots, 1/2^n, 1/2^n$;

b) $1/3, 1/3, 1/9, 1/9, \ldots, 1/3^n, 1/3^n, 1/3^n$?

P 2. Веса 2 монеток выбираются случайно и независимо среди чисел $1, \ldots, 4$. Какова энтропия Шеннона случайной величины, равной результату сравнения на чашечных весах весов первой и второй монетки?

Определение 1

Взаимной информацией между случайными величинами α и β будем называть функцию $I(\alpha : \beta) = H(\alpha) - H(\alpha|\beta)$.
Также определим взаимную информацию в α и β при условии γ. $I(\alpha : \beta|\gamma) = H(\alpha|\gamma) - H(\alpha|\beta, \gamma)$.

P 3. Докажите следующие свойства взаимной информации:

a) $I(\alpha : \beta) = I(\beta : \alpha)$

b) α и β независимы тогда и только тогда, когда $I(\alpha : \beta) = 0$.

c) $I(f(\alpha) : \beta) \leq I(\alpha : \beta)$ для любой функции f.

P 4. Докажите следующее неравенство

$$2H(X, Y, Z) \leq H(X, Y) + H(X, Z) + H(Y, Z).$$

P 5. Неравенство Шерера. Пусть $T_1, \ldots, T_k$ — произвольные кортежи, составленные из переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, причем каждая переменная входит ровно в r кортежей. Докажите, что $rH(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leq H(T_1) + \ldots + H(T_n)$.

P 6. Докажите, что следующее неравенство выполнено *не для всех* троек случайных величин (α, β, γ):

$$2H(\alpha, \beta, \gamma) \leq H(\alpha, \beta) + H(\alpha, \gamma|\beta) + H(\beta, \gamma|\alpha).$$

P 7. Пусть случайная величина α имеет распределение $1/3, 2/3$, а случайная величина β имеет распределение $1/2, 1/2$. В каких пределах может изменяться $H(\alpha, \beta)$?

P 1.1. Пусть загадано число от 1 до N. Можно задавать любые вопросы вида число лежит в интервале $[a, b]$ с ответом «да/нет». Сколько вопросов потребуется, если на один ответ можно дать неверный ответ?

P 1.2. Для множества $A \subseteq \mathbb{N}^3$ будем обозначать $\pi_{ij}(A)$ проекцию A на координатную плокость, задаваемую осями i, j (индексы $i, j \in [3]$). Докажите, что для любого конечного A выполняется:

$$2 \log |A| \leq \log |\pi_{12}(A)| + \log |\pi_{13}(A)| + \log |\pi_{23}(A)|.$$

P 1.3. Для множества $A \subseteq \mathbb{N}^4$ будем обозначать $\pi_{ij}(A)$ проекцию A на координатную плокость, задаваемую осями i, j, k (индексы $i, j, k \in [4]$). Докажите, что для любого конечного A выполняется:

$$3 \log |A| \leq \log |\pi_{123}(A)| + \log |\pi_{124}(A)| + \log |\pi_{134}(A)| + \log |\pi_{234}(A)|.$$

P 1.7. Даны две группы камешков, причем камешки в каждой группе упорядочены по весу. В первой группе n камешков, а во второй — m. Требуется упорядочить все камешки по весу. Придумайте способ, решающий эту задачу за менее чем $m \log n$ взвешиваний при больших n.