Определение 1

Пусть A — некоторое конечное множество. *Информация в множестве* A — это число

$$\chi(A) = \log |A|.$$

Оно соответствует интуитивному представлению о том, что необходимо $\log |A|$ бит для выделения некоторого элемента множества. Отметим, что число $\chi(A)$ может быть нецелым.

P 1. Пусть загадано число от 1 до N. Можно задавать любые вопросы вида число лежит в интервале $[a, b]$ с ответом «да/нет». Сколько вопросов потребуется, если на один ответ можно дать неверный ответ?

P 2. Для множества $A \subseteq \mathbb{N}^3$ будем обозначать $\pi_{ij}(A)$ проекцию A на координатную плокость, задаваемую осями i, j (индексы $i, j \in [3]$). Докажите, что для любого конечного A выполняется:

$$2 \log |A| \leq \log |\pi_{12}(A)| + \log |\pi_{13}(A)| + \log |\pi_{23}(A)|.$$

P 3. Для множества $A \subseteq \mathbb{N}^4$ будем обозначать $\pi_{ij}(A)$ проекцию A на координатную плокость, задаваемую осями i, j, k (индексы $i, j, k \in [4]$). Докажите, что для любого конечного A выполняется:

$$3 \log |A| \leq \log |\pi_{123}(A)| + \log |\pi_{124}(A)| + \log |\pi_{134}(A)| + \log |\pi_{234}(A)|.$$

P 4. Пусть имеется некоторая карточка, про которую известно, что на одной её стороне написано целое неотрицательное число n, а на другой — целое число $n + 1$. Алиса и Боб сидят друг напротив друга смотрят на эту карточку с разных сторон и между ними происходит следующий разговор.

А: Я не знаю числа на стороне Боба.

Б: Я не знаю числа на стороне Алисы.

Это повторяется 10 раз и после этого Алиса говорит, что знает число на стороне Боба. Какие числа могли быть написаны на карточке?

Определение 2

Пусть A — двумерное множество с проекциями X и Y. Количество информации, содержащееся в A, если мы уже знаем вторую координату, определяется следующим образом:

$$\chi_{Y|X}(A) = \max_x \left(\log |A_x| \right),$$

где A_x — сечение A по координате x.

Интуитивно — это достаточное количество бит, нужное для кодирования элемента, зная его первую проекцию. Но это определение «плохое», так как разным элементам могут соответствовать сечения разных размеров.

Нетрудно проверить, что при таком определении выполнено неравенство

$$\chi(A) \leq \chi(A_Y) + \chi_{X|Y}(A).$$

P 5. Имеются 60 монет, среди которых ровно одна фальшивая (неизвестно какая). Все настоящие монеты одного веса, а фальшивая легче или тяжелее. На чашечных весах можно сравнивать по весу любые две группы монет. Нужно найти фальшивую монету и выяснить, легче она или тяжелее. Докажите, что необходимо и достаточно сделать 5 взвешиваний.

P 6. Дано 5 различных по весу камешков $a_1, \ldots, a_5$. Можно ли их упорядочить по весу с помощью 7 взвешиваний?

P 7. Даны две группы камешков, причем камешки в каждой группе упорядочены по весу. В первой группе n камешков, а во второй — m. Требуется упорядочить все камешки по весу. Придумайте способ, решающий эту задачу за менее чем $m \log n$ взвешиваний при больших n.