

Задачи на *зачет* не идут в общее количество баллов и не будут учитываться на *экзамене*. Всех этих задач хватит, чтобы дойти с 0% до 100%. Если вы хотите увеличить букву за *зачет*, то можно решать задачи и набирать дополнительные баллы.

Сдавать задачи можно в формате pdf (только LaTeX или typst) на ✉ [aaignatiev@hse.ru](mailto:aaignatiev@hse.ru). Или устно на зачете 31 мая.

**Р 1. 6 баллов** Дано шесть монет разного веса и известно, что первая монета легче второй, третья легче четвертой, а четвертая легче пятой. Имеются весы, позволяющие сравнить по весу любые две монеты. Доказать, что для того, чтобы упорядочить по весу все монеты, необходимо и достаточно 7 взвешиваний.

**Р 2. 6 баллов** Имеются две карточки, на каждой из которых написано целое число от 0 до 8. Алисе сообщили сумму  $x$  этих чисел. При каких  $x$  Алисе необходимо и достаточно задать два вопроса с ответами ДА/НЕТ, чтобы узнать оба написанных числа?

**Р 3. 6 баллов** Пусть в слове длины 1000 количества букв  $a, b, c, d, e, f, g$  равны, соответственно, 50, 100, 150, 150, 150, 200, 200. Найдите энтропию Шеннона для этих частот. Постройте код Хаффмана для алфавита  $a, b, c, d, e, f, g$ , и этих частот. Найдите длину кода этого слова, полученного применением кодирования Хаффмана к каждой букве.

**Р 4. 6 баллов** Пусть случайная величина  $\alpha$  имеет распределение  $p(0) = \frac{1}{9}, p(1) = \frac{1}{6}, p(2) = \frac{1}{6}, p(3) = \frac{5}{9}$ . Положим  $\beta = \alpha \bmod 2$ . Найти  $H(\alpha), H(\beta), H(\alpha, \beta)$ .

**Р 5. 6 баллов** Для каждого натурального  $n > 0$  приведите пример таких распределений  $a$  и  $b$ , что  $I(a : b) = n, H(a) = 2n, H(b) = 2n$ .

**Р 6. 8 баллов** Докажите неравенство:

$$H(\alpha) \leq H(\alpha | \beta) + H(\alpha | \gamma) + I(\beta : \gamma).$$

**Р 7. 6 баллов** У Алисы имеется целое число  $x$  в интервале  $\{0, \dots, 2^n - 1\}$ , а у Боба целое число  $y$  в том же интервале. Докажите, что для того, чтобы найти  $2x + y$ , необходимо всего передать  $2n$  бит.

**Р 8. 10 баллов** Рассмотрим функцию  $IP_n : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ , где  $IP_n(x, y) = \sum x_i y_i \bmod 2$ . Докажите, что коммуникационная сложность  $IP_n$  равна  $n - O(1)$ .

**Р 9. 6 баллов** Рассмотрим функцию  $OR_n(x) := x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$ . Докажите, что  $C(KW_{OR_n}) = \log n$ .

**Р 10. 10 баллов** Пусть в слове  $x$  длины  $n$  не более  $np$  единиц. Докажите, что

$$K(x) \leq h(p)n + O(1),$$

где  $h(p)$  — энтропия нечестной монетки.

**Р 11. 10 баллов** Докажите, что

$$K(x, y) \leq K(x) + 2 \log K(x) + K(y) + c,$$

для любых  $x, y$  и некоторой константы  $c$ .