P 1. Рассмотрим функцию $f\colon \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Докажите, что размер максимального трудного множества случайной функции f не более $\mathcal{O}(\log n)$ с высокой вероятностью (хотя бы константной).

P 2. Пусть в матрице функции $f\colon \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ все строки различны. Докажите, что $C(f) \geq \log n$.

Определение 1

Пусть $f\colon X \times Y \to Z$ и μ — распределение на $X \times Y$. Заметим, что для любого коммуникационного протокола Π для функции f распределение μ индуцирует распределение на листьях данного протокола естественным образом. **Внешней информационной стоимостью** (или внешним информационным разглашением) протокола Π по распределению μ будем называть величину:

$$\mathrm{IC}_\mu^{\mathrm{ext}}(\Pi) = I(\Pi(X,Y) : X, Y).$$

Внутреннее информационное разглашение протокола Π на распределении μ:

$$\mathrm{IC}_\mu^{\mathrm{int}}(\Pi) = I(\Pi(X,Y) : X \mid Y) + I(\Pi(X,Y) : Y \mid X).$$

Также определим внешнюю информационную сложность самой функции $\mathrm{IC}_\mu^{\mathrm{ext}}(f) = \min_\Pi \mathrm{IC}_\mu^{\mathrm{ext}}(\Pi)$.

P 3. Докажите, что для любой булевой функции f и любого распределения μ существует такой протокол Π для KW_f, что $\mathrm{IC}_\mu^{\mathrm{int}}(\Pi) \leq 2\log n$.
Подсказка: попробуйте рассмотреть прокол, где Алиса пересылает Бобу биты входа до тех пор, пока они не найдут бит различия.

Определение 2

Пусть $F : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ — вычислимая функция. **Сложность описания** x относительно F определим следующим образом: $K_F(x) := \min\{|p| \mid F(p) = x\}$. Будем говорить, что способ описания F *не хуже* G, обозначим $F \prec G$, если существует такая константа c_G, что для $\forall x \in \{0,1\}^*$, $K_F(x) \leq K_G(x) + c_G$. **Оптимальным** будем называть такой способ описания U, который не хуже любого другого. **Колмогоровской сложностью** x будем называть значение $K(x) := K_U(x)$.

P 4. Колмогоровская сложность обладает следующими свойствами.

a) Существует c такая, что для всех x: $K(x) \leq |x| + c$.

b) Существует c такая, что для всех x: $K(xx) \leq |x| + c$.

c) Для любых оптимальных F_1 и F_2 выполняется $F_1 \prec F_2$ и $F_2 \prec F_1$, т.е. существует такая константа c, что $|K_{F_1}(x) - K_{F_2}(x)| \leq c$.

P 5. Докажите, что ряд $\sum\limits_{x\in\{0,1\}^*} 2^{-K(x)}$ расходится.

P 5.1. Приведите пример такой матрицы M_f, что $L(f) > \chi(f) = \chi_0(f) + \chi_1(f)$.

P 5.2. Докажите, что

$$\log \chi(f) \leq C(f) \leq \mathcal{O}(\log \chi_0(f) \log \chi_1(f)),$$

где $\chi_0(f), \chi_1(f)$ — количество нулевых (единичных) прямоугольников в минимальном разбиении M_f.

P 5.9. Докажите, что $C(\mathrm{CIS}_G) = \mathcal{O}(\log^2 n)$. Где x интерпретируется как характеристическая функция некоторой клики в графе G, а y — как характеристическая функция некоторого независимого множества в графе G. $\mathrm{CIS}_G(x, y) = 1$, если клика и независимое множество имеют общую вершину, обе стороны знают граф G.

P 6.7. Докажите, что $\mathrm{R}^{\mathrm{pub}}_{\frac{1}{10}}(\mathrm{DISJ}_n^{\leq k}) = \mathcal{O}(2^{2k})$, где в функции $\mathrm{DISJ}_n^{\leq k}$ множества игроков имеют размеры не больше k, $\mathrm{DISJ}_n^{\leq k}(x, y) = 1$, если множества не пересекаются.