1. Пусть Алиса и Боб получают битовые строки длины n и хотят вычислить функцию $\mathrm{MAX}(x, y)$. Докажите, что:

a) $C(\mathrm{MAX}) \le \frac{3}{2}n + \mathcal{O}(1)$,

b) $C(\mathrm{MAX}) \le n + o(n)$.

Определение 1 (Коммуникационная сложность в среднем)

Раньше мы интересовались, сколько битов требуется передать в худшем случае, чтобы вычислить данную функцию $f(x, y)$. То есть, сложность коммуникационного протокола определялась, как его глубина (длина максимального пути от корня к листу). Теперь же будем интересоваться количеством битов, передаваемым протоколом в среднем, где усреднение происходит по некоторой вероятностной мере на парах (x, y).

Итак, зафиксируем некоторое распределение μ вероятностей на на парах (x, y). Средним количеством переданных битов для данного протокола Π называется сумма

$$\sum_{(x,y)\in X\times Y} \mu(x, y) c_\Pi(x, y),$$

где $c_\Pi(x, y)$ обозначает количество переданных протоколом Π битов на входах x, y.

Мерой множества пар будем называть сумму всех вероятностей пар из R, обозначим за $\mu(R)$. Через α_μ будем обозначать максимальную меру одноцветного для f прямоугольника.

2. Для любого распределения вероятностей μ среднее количество битов переданных любым протоколом Π вычисления f не меньше $-\log \alpha_\mu$.

3. Построить распределение вероятностей на парах (x, y), обладающее следующим свойством. Любой коммуникационный протокол, вычисляющий функцию EQ, в среднем передает не менее n битов.

4. Постройте детерминированный коммуникационный протокол, который вычисляет функцию GT, передавая в среднем константу битов. Функция $\mathrm{GT}(x, y)$ определена на парах x, y целых чисел в интервале $\{0, \dots, 2^n - 1\}$ и принимает значение 1, если $x > y$, и значение 0, иначе. Говоря о среднем, мы имеем в виду, что x, y выбираются случайно и независимо среди всех чисел указанного интервала с равномерным распределением.

Определение 2 (Вероятностная коммуникационная сложность)

Пусть у Алисы и Боба есть доступ к общей последовательности случайных битов r. Теперь они знают, что их партнер видит ту же последовательность r, и действие каждого игрока в вершине протокола зависит от его входа, предыдущей коммуникации и последовательности r. *Вероятностной коммуникационной сложностью функции f с публичными битами r* называется следующая величина:

$$\mathrm{R}_\varepsilon^{\mathrm{pub}}(f) = \min_{\Pi} \max_{(x,y)} (\sharp\text{переданных битов}),$$

где протоколы Π удовлетворяют условию $\Pr_r[\Pi(x, y) \ne f(x, y)] \le \varepsilon$. Количество переданных бит считается в худшем случае по всем случайным битам r, но большой разницы нет, если вместо этого считать матожидание.

5. Покажите, что $\mathrm{R}^{\mathrm{pub}}_{\frac{1}{10}}(\mathrm{EQ}) = \mathcal{O}(1)$.

6. Докажите, что $\mathrm{R}^{\mathrm{pub}}_{\frac{1}{10}}(\mathrm{GT}) = \mathcal{O}(\log n \cdot \log\log n)$.

7. Докажите, что $\mathrm{R}^{\mathrm{pub}}_{\frac{1}{10}}(\mathrm{DISJ}^{\leq k}_n) = \mathcal{O}(2^{2k})$, где в функции $\mathrm{DISJ}^{\leq k}_n$ множества игроков имеют размеры не больше k, $\mathrm{DISJ}^{\leq k}_n(x, y) = 1$, если множества не пересекаются.

8. Алисе сообщили значение случайной величины α, а Бобу — значение некоторой функции $f(\alpha)$. Придумайте алгоритм, который позволит Алисе сообщить Бобу значение α, передав в среднем не более $H(\alpha \mid f(\alpha)) + 1$ битов.

5.1 (Б09)**.** Приведите пример такой матрицы M_f, что $L(f) > \chi(f) = \chi_0(f) + \chi_1(f)$.

5.2 (Б09)**.** Докажите, что

$$\log \chi(f) \leq C(f) \leq \mathcal{O}(\log \chi_0(f) \log \chi_1(f)),$$

где $\chi_0(f), \chi_1(f)$ — количество нулевых (единичных) прямоугольников в минимальном разбиении M_f.

5.9 (Б09)**.** Докажите, что $C(\mathrm{CIS}_G) = \mathcal{O}(\log^2 n)$. Где x интерпретируется как характеристическая функция некоторой клики в графе G, а y — как характеристическая функция некоторого независимого множества в графе G. $\mathrm{CIS}_G(x, y) = 1$, если клика и независимое множество имеют общую вершину, обе стороны знают граф G.