## 1. Коммуникационная сложность

Алиса и Боб играют в следующую игру. Алисе сообщается число $x$, а Бобу — число $y$, также им задана функция $f$ от двух аргументов, и они хотят вычислить её значение $f(x,y)$ на некотором входе. В их распоряжении есть устройство связи, которое позволяет передавать друг другу битовые сообщения (т.е. за одно сообщение можно послать «0» или «1»). Алиса и Боб могут заранее договориться о том, какие сообщения они будут посылать.

**Определение 1 (Коммуникационный протокол)**

Пусть $X$, $Y$ и $Z$ — это три произвольных непустых конечных множества, а $f\colon X \times Y \to Z$ — некоторая функция. *Коммуникационный протокол* $\Pi$ для функции $f$ — это упорядоченное корневое двоичное дерево со следующими пометками:

- каждая внутренняя вершина помечена буквой «А» или «Б»,
- каждое ребро к левому потомку помечено нулём, к правому — единицей,
- каждый лист помечен элементом множества $Z$.

Для каждой внутренней вершины $v$ с пометкой «А» определена функция $A_v\colon X \to \{0,1\}$, а для каждой внутренней вершины $u$ с пометкой «Б» определена функция $B_u\colon Y \to \{0,1\}$.
*Результат* протокола $\Pi$ на входе $(x,y)$ обозначается $\Pi(x,y)$, и определяется, как пометка конечной вершины пути $\pi(x,y)$, построенного по следующим правилам:

- первая вершина пути $\pi(x,y)$ — это корень,
- каждая следующая вершина пути является потомком предыдущей, причём
  - каждая вершина пути $v$ с пометкой «А» соединена с потомком ребром с пометкой $A_v(x)$
  - каждая вершина $u$ с пометкой «Б» соединена с потомком ребром с пометкой $B_u(y)$
- последняя вершина пути $\pi(x,y)$ — лист.

Протокол $\Pi$ называется *корректным* протоколом для функции $f$, если для каждой пары входов $(x,y)$ выполняется $\Pi(x,y) = f(x,y)$.

Протокол описывает общение игроков на всех возможных входах. Пометки во внутренних вершинах — это указание на игрока, который посылает сообщение, пометки на рёбрах — это посылаемые сообщения, пометки в листьях — это результат вычисления $f(x,y)$, а функции в вершинах — это правила, по которым игроки выбирают сообщение, которое нужно послать в данный момент. Каждой паре входов $(x,y)$ соответствует путь $\pi(x,y)$ от корня к некоторому листу, который задаётся описанными выше правилами. Если протокол корректный, то для каждой пары входов $(x,y)$ путь $\pi(x,y)$ заканчивается в листе с пометкой $f(x,y)$.

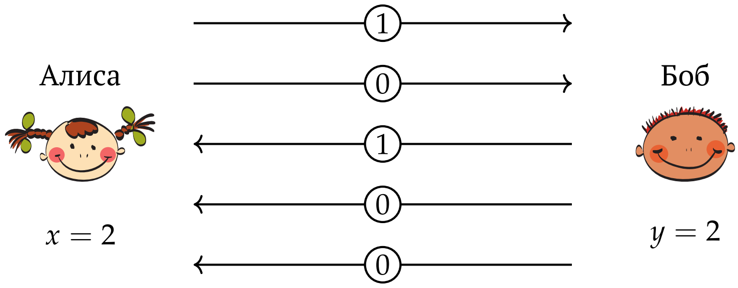


Рис. 1. Возможное взаимодействие Алисы и Боба.

**Определение 2**

*Сложностью функции* $f$ называется наименьшая глубина протокола, вычисляющего функцию $f$ (обозначается $C(f)$). (Глубина дерева — это максимальная рёберная длина пути от корня до листа.)
Также обозначим за $L(f)$ — минимальное число листьев в протоколе для функции $f$.

Входное пространство коммуникационной задачи можно вопринимать как матрицу. Каждой функции $f$ будем сопоставлять матрицу $X \times Y$ ($M_f$), в которой в клетке $(x_i, y_j)$ стоит значение $f(x_i, y_j)$.

**Утверждение 1**

Рассмотрим дерево протокола со входом из множества $X \times Y$. Рассмотрим в нём произвольную вершину $u$. Тогда все входы, из которых можно прийти в вершину $u$, образуют комбинаторный прямоугольник прямоугольник $R_u = X_u \times Y_u \subseteq X \times Y$.

*Доказательство.* Это можно доказать двумя способами.

*Первый способ:* пусть на входах $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2)$ мы приходим в вершину $u$. Тогда нетрудно убедиться, что на входе $(x_1, y_2)$ Алиса и Боб будут делать те же действия, что и на входах $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2)$ соответственно. Отсюда видно, что входы, приводящие в вершину $u$, образуют прямоугольник $R_u = X_u \times Y_u \subseteq X \times Y$.

*Второй способ:* Рассмотрим таблицу элементов $X \times Y$. После первого хода Боба табличка делится пополам горизонтальной линией, так как при одних $x \in X$ Боб посылает Алисе 1, а при других — 0. Потом Алиса посылает свой бит Бобу, и каждый из двух получившихся прямоугольников делится своей вертикальной прямой, и так далее. В итоге мы получим разбиение $X \times Y$ на непересекающиеся прямоугольники, и каждый из этих прямоугольников соответствует листу в коммуникационном протоколе. □

Про прямоугольник $R_u$ можно думать в следующим образом: если мы находимся в вершине протокола $u$, то нам необходимо решить задачу (то есть построить протокол) для всех входов из прямоугольника $R_u$. В частности этот подход можно рассмотреть, как комбинаторное определение протокола: бинарное дерево, в котором каждой вершине сопоставлен прямоугольник входов. И если вершины $a, b$ являются потомками $u$, то $R_u \subseteq R_a \cup R_b$.

**Определение 3**

Прямоугольник $R \subset X \times Y$ называется одноцветным для функции $f$, если существует $z \in Z$, что для всех $(x, y) \in R$ верно $f(x, y) = z$. Такой прямоугольник будем называть $z$-одноцветным.
Заметим, что в листьях коммуникационного протокола находятся одноцветные прямоугольники.

Допустим, что игрокам нужно вычислить функция $f\colon \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Рассмотрим величину $\chi_0(f)$, равную минимальному числу комбинаторных (то есть это необязательно геометрически один прямоугольник) прямоугольников, которыми можно дизъюнктно покрыть нули в таблице. Аналогично определяется $\chi_1(f)$. Тогда листьев в коммуникационном протоколе будет хотя бы $\chi_0(f) + \chi_1(f)$. Эти рассуждения дают следующую оценку:

$$C(f) \geq \log(\chi_0(f) + \chi_1(f)).$$

Однако эта оценка не всегда точна. Теперь рассмотрим пример, когда разбиение на одноцветные прямоугольники может не соответствовать протоколу.

*Пример* 1. Рассмотрим такой пример разбиения таблицы $X \times Y$ на прямоугольники: в центре находится прямоугольник из 1, а вокруг него расположены 4 прямоугольника из 0. Покажем, что для этого разбиения не существует дерева протокола. Действительно, рассмотрим первое действие игроков. После него таблица должна поделиться на две части, но на рисунке 2 видно, что нет разреза, проходящего через всю таблицу.

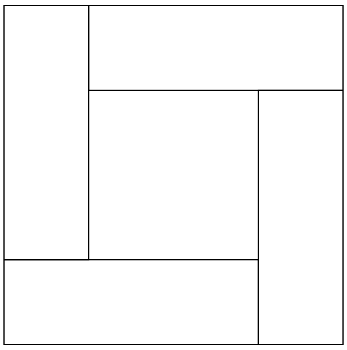

Рис. 2.

## 2. Задачи

**1.** Приведите пример такой матрицы $M_f$, что $L(f) > \chi(f) = \chi_0(f) + \chi_1(f)$. (пример выше не походит, можете подумать почему)

**2.** Докажите, что

$$\log \chi(f) \leq C(f) \leq \mathcal{O}(\log \chi_0(f) \log \chi_1(f)),$$

где $\chi_0(f), \chi_1(f)$ — количество нулевых (единичных) прямоугольников в минимальном разбиении $M_f$.

**3.** Докажите, что $C(\mathrm{EQ}_n) \geq n$, где $\mathrm{EQ}_n\colon \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ и $\mathrm{EQ}_n(x,y) = 1 \Leftrightarrow x = y$.

**4.** Рассмотрим функцию SUM: $\{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}^{n+1}$, возвращающую сумму чисел в двоичной системе счисления. Докажите, что $C(\mathrm{SUM}) = 2n$.

**5.** Пусть дан граф $G$ без петель. Алиса и Боб получают две вершины данного графа $x, y$ и хотят узнать существует ли ребро $(x, y)$. Докажите, что детерминированная сложность данной задачи не менее $\log \chi(G)$, где $\chi(G)$ — хроматическое число графа $G$.
*Подсказка:* попробуйте предъявить хорошую раскраску, если есть короткий коммуникационный протокол.

**6.** Покажите, что $C(\mathrm{MED}) = \mathcal{O}(\log^2 n)$, где $x$ и $y$ это характеристические функции подмножеств $[n]$, а $\mathrm{MED}(x, y)$ — медиана мультимножества $x \cup y$ (если элемент встречается и в $x$ и в $y$, то считаем его дважды).
*Комментарий:* на самом деле $C(\mathrm{MED}) = \Theta(\log n)$.

**7.** У Алисы имеется $n$-битная строка $x$, а у Боба $n$-битная строка $y$. Известно, что $y$ получен из $x$ инвертированием одного бита.

a) Придумайте детерминированный коммуникационный протокол сложности $\mathcal{O}(\log n)$, который позволяет Бобу узнать $x$.

b) Придумайте однораундовый детерминированный коммуникационный протокол сложности $\mathcal{O}(\log n)$, который позволяет Бобу узнать $x$. (В однораундовом протоколе Алиса посылает некоторое сообщение Бобу, после чего Боб вычисляет результат).

**8.** Пусть для некоторой функции $f\colon X \times Y \to Z$ существует коммуникационный протокол с $\ell$ листьями. Докажите, что $C(f) \leq \mathcal{O}(\log \ell)$.

**9.** Докажите, что $C(\mathrm{CIS}_G) = \mathcal{O}(\log^2 n)$. Где $x$ интерпретируется как характеристическая функция некоторой клики в графе $G$, а $y$ — как характеристическая функция некоторого независимого множества в графе $G$. $\mathrm{CIS}_G(x, y) = 1$, если клика и независимое множество имеют общую вершину, обе стороны знают граф $G$.