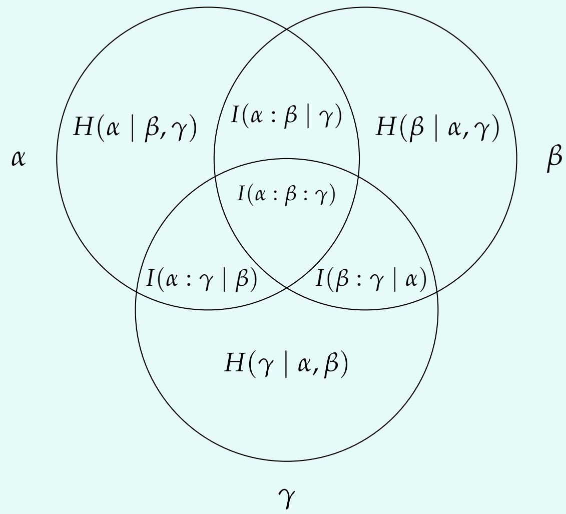
Определение 1

Определим общую информацию трех случайных величин:

$$I(\alpha : \beta : \gamma) = I(\alpha : \beta) - I(\alpha : \beta \mid \gamma).$$

Соотношения на информационные величины имеют удобную геометрическую интерпретацию. Давайте нарисуем три круга Эйлера и сопоставим площади каждой из получившихся замкнутых области некоторую информационную величину.



1. Докажите неравенство или предъявите контрпример к нему:

a) $H(\alpha \mid \beta) + H(\alpha \mid \gamma) \leq H(\alpha) + H(\alpha \mid \beta, \gamma) + I(\beta : \gamma \mid \alpha)$,

b) $H(\gamma) \leq I(\alpha : \gamma) + I(\beta : \gamma) + H(\gamma \mid \beta, \alpha)$.

2. Пусть энтропия случайной величины a равна n, а взаимная информация пар a и b, а также a и c больше $3n/4$. Докажите, что $I(b : c) > n/2$.

3. Пусть $G = (V, E)$ неориентированный граф, t — число треугольников и ℓ — число ребер. Докажите, что $(6t)^2 \leq (2\ell)^3$.

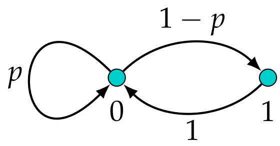
4 (неравенство Фано). Пусть случайные величины принимают значения в n элементном множестве. Обозначим за $\varepsilon = \Pr[\alpha \neq \beta]$. Докажите, что $H(\alpha \mid \beta) \leq \varepsilon \log(n - 1) + h(\varepsilon)$, где $h(\varepsilon)$ обозначает функцию Шеннона — энтропию случайной величины с двумя значениями, имеющими вероятности ε и $1 - \varepsilon$.

5 (обобщенное неравенство Фано). Пусть случайная величина α принимает значения в некотором n элементном множестве A. Пусть значение случайной величины β принадлежит A с вероятностью p, причём условная вероятность события $\alpha \neq \beta$ при условии $\beta \in A$ равна ε. Докажите, что выполняется неравенство:

$$H(\alpha \mid \beta) \leq (1 - p) \log n + p\varepsilon \log(n - 1) + ph(\varepsilon).$$

2.3 (Б09). Пусть $T_1, \ldots, T_k$ — произвольные кортежи, составленные из переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, причем каждая переменная входит ровно в r кортежей. Докажите, что $rH(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leq H(T_1) + \ldots + H(T_n)$.

2.6 (Б09, Б10)**.** Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — случайная величина, задающая последовательность состояний Марковской цепи, изображенной на рисунке. Чему равен предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{H(\alpha)}{n}$, если $\alpha_0 = 0$?



2.7 (Б09, Б10)**.** Пусть α, α' две независимые одинаково распределенные величины. Докажите, что $\Pr[\alpha = \alpha'] \geq 2^{-H(\alpha)}$.

2.8 (Б09)**.** Имеется набор из n камней. Сколько взвешиваний необходимо, чтобы найти самый тяжелый и самый легкий камни (на каждую чашу можно класть не более одного камня)?