1. Докажите, что величины α, β, γ независимы в совокупности (вероятность события $(\alpha = \alpha_i, \beta = \beta_i, \gamma = \gamma_i)$ равна произведению трех отдельных вероятностей) тогда и только тогда, когда

$$H(\alpha, \beta, \gamma) = H(\alpha) + H(\beta) + H(\gamma).$$

Определение 1

Взаимной информацией между случайными величинами α и β будем называть функцию $I(\alpha : \beta) = H(\alpha) - H(\alpha|\beta)$.
Также определим взаимную информацию в α и β при условии γ. $I(\alpha : \beta|\gamma) = H(\alpha|\gamma) - H(\alpha|\beta, \gamma)$.

2. Докажите следующие свойства взаимной информации:

a) $I(\alpha : \beta) = I(\beta : \alpha)$

b) α и β независимы тогда и только тогда, когда $I(\alpha : \beta) = 0$.

c) $I(f(\alpha) : \beta) \leq I(\alpha : \beta)$ для любой функции f.

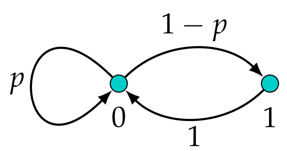
3 (неравенство Шерера). Пусть $T_1, \dots, T_k$ — произвольные кортежи, составленные из переменных $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, причем каждая переменная входит ровно в r кортежей. Докажите, что $rH(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq H(T_1) + \ldots + H(T_n)$.

4. Докажите, что следующее неравенство выполнено *не для всех* троек случайных величин (α, β, γ):

$$2H(\alpha, \beta, \gamma) \leq H(\alpha, \beta) + H(\alpha, \gamma|\beta) + H(\beta, \gamma|\alpha).$$

5. Пусть случайная величина α имеет распределение $1/3, 2/3$, а случайная величина β имеет распределение $1/2, 1/2$. В каких пределах может изменяться $H(\alpha, \beta)$?

6. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — случайная величина, задающая последовательность состояний Марковской цепи, изображенной на рисунке. Чему равен предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{H(\alpha)}{n}$, если $\alpha_0 = 0$?



7. Пусть α, α' две независимые одинаково распределенные величины. Докажите, что $\Pr[\alpha = \alpha'] \geq 2^{-H(\alpha)}$.

8. Имеется набор из n камней. Сколько взвешиваний необходимо, чтобы найти самый тяжелый и самый легкий камни (на каждую чашу можно класть не более одного камня)?