P 1. Алиса и Боб играют в следующую игру. Они находятся в разных городах, Алисе сообщается число x, а Бобу — число y, причём x и y — это 0, 1, или 2. В их распоряжении есть устройство связи, которое позволяет передавать друг другу битовые сообщения (т.е. за одно сообщение можно послать «0» или «1»). Алиса и Боб могут заранее договориться о том, какие сообщения они будут посылать. Как им договориться, чтобы в результате оба игрока узнали значение $x + y$?

P 2. Как решить задачу так, чтобы Алиса и Боб в сумме послали не более четырёх сообщений?

P 3. Как решить задачу так, чтобы Алиса и Боб всегда посылали не более четырёх сообщений, но при этом на некоторых входах посылали строго менее четырёх сообщений?

P 4. Докажите, что не существует способа решить задачу , при котором Алиса и Боб будут всегда посылать не более трёх сообщений.

P 5. Пусть Алиса и Боб вместо суммы хотят вычислить произведение двух целых чисел от 0 до $n = 2^k - 1$. Как это сделать за $2k$ сообщений?

P 6. Как вычислить $f : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}^k$ за $2n$ сообщений?

P 7. Как вычислить $f : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}^k$ за $n + k$ сообщений?

P 8. Пусть $f : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ и $f(x,y) = x$. Докажите, что всегда будет пара (x,y), на которой Алиса и Боб пошлют не менее n сообщений.

P 9. Пусть Π — некоторый протокол для функции $f\colon X \times Y \to Z$, и пусть на входах (x_1,y_1) и (x_2,y_2) пути $\pi(x_1,y_1)$ и $\pi(x_2,y_2)$ заканчиваются в одном и том же листе. Докажите, что $\pi(x_1,y_2)$ и $\pi(x_2,y_1)$ заканчиваются в том же листе.

P 10. Докажите, что если Ева, подслушивающая общение Алисы и Боба, знает протокол общения, то она может восстановить $f(x,y)$ не зная x и y.

P 11. Докажите, что $C(\mathrm{EQ}_n) = n + 1$.
(В этой задаче нужно показать, что любой протокол для EQ_n будет глубины не меньше $n + 1$. Попробуйте оценить минимальное число листьев в таком протоколе.)

Функция $\text{РАЗНОСТЬ}_n\colon \{0,\dots,2^n-1\} \times \{0,\dots,2^n-1\} \to \{-2^n+1,\dots,2^n-1\}$ вычисляет разность целых чисел x и y: $\text{РАЗНОСТЬ}_n(x,y) = x - y$.

P 12. Докажите, что $C(\text{РАЗНОСТЬ}_n) = 2n$.

P 13. Функция $\mathrm{DISJ}_n\colon \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ проверяет, есть ли позиция, в которой и у Алисы, и у Боба стоят единицы: $\mathrm{DISJ}_n(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда существует $i \in \{1,\dots,n\}$ такое, что $x[i] = y[i] = 1$ (здесь и далее $x[i]$ обозначает i-й бит строки x). Докажите, что существует такая константа $c > 0$, что $C(\mathrm{DISJ}_n) \geq c \cdot n$.

Функция $\text{СРЕДНИЙ}_n(x,y)\colon \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{1,\dots,n\}$, определяет центральный элемент в упорядоченной по возрастанию последовательности, содержащей все номера позиций, на которых в строках x и y встречаются единицы (если в позиции i у обоих игроков стоят единицы, то i в последовательности встречается дважды). Если число элементов нечётно и равно $2m+1$, функция возвращает элемент на позиции $m+1$. В случае, если число элементов чётно и равно $2m$, функция возвращает элемент на позиции $m+1$.

P 14. Докажите, что существует такая константа $c > 0$, что для любого $n = 2^k$ выполняется $C(\text{СРЕДНИЙ}_n) \leq c \cdot k^2$.

P 15. Докажите, что существует такая константа $c > 0$, что для любого $n = 2^k$ выполняется $C(\text{СРЕДНИЙ}_n) \leq c \cdot k$.

P 16. Приведите пример, когда $L(f) > \chi(f)$.

P 17. Для $n = 2^k$ покажите, что $C(\mathrm{KW}_{\oplus_n}) \leq 2k$.

P 18. Для $n = 2^k$ покажите, что $C(\mathrm{KW}_{\vee_n}) = k$.

P 19. У Алисы имеется n-битная строка x, а у Боба n-битная строка y. Известно, что y получен из x инвертированием одного бита.

a) Придумайте детерминированный коммуникационный протокол сложности $\mathcal{O}(\log n)$, который позволяет Бобу узнать x.

b) Придумайте одनораундовый детерминированный коммуникационный протокол сложности $\mathcal{O}(\log n)$, который позволяет Бобу узнать x. (В однораундовом протоколе Алиса посылает некоторое сообщение Бобу, после чего Боб вычисляет результат).

P 20. Пусть дан граф G без петель. Алиса и Боб получают две вершины данного графа x, y и хотят узнать существует ли ребро (x, y). Докажите, что детерминированная сложность данной задачи не менее $\log \chi(G)$, где $\chi(G)$ — хроматическое число графа G.
Подсказка: попробуйте предъявить хорошую раскраску, если есть короткий коммуникационный протокол.

P 21. Докажите, что $C(\mathrm{CIS}_G) = \mathcal{O}(\log^2 n)$. Где x интерпретируется как характеристическая функция некоторой клики в графе G, а y — как характеристическая функция некоторого независимого множества в графе G. $\mathrm{CIS}_G(x, y) = 1$, если клика и независимое множество имеют общую вершину, обе стороны знают граф G.

P 22. Постройте детерминированный коммуникационный протокол, который вычисляет функцию GT, передавая в среднем константу битов. Функция $\mathrm{GT}(x, y)$ определена на парах x, y целых чисел в интервале $\{0, \ldots, 2^n - 1\}$ и принимает значение 1, если $x > y$, и значение 0, иначе. Говоря о среднем, мы имеем в виду, что x, y выбираются случайно и независимо среди всех чисел указанного интервала с равномерным распределением.

P 23. Докажите, что коммуникационная сложность IP равна $n - \mathcal{O}(1)$.

P 24. Улучшите константу в балансировке протоколов. Доказать, что $C(f) \leq c \log_2 L(f)$ для $c < 3$.

P 25. Пусть в матрице функции $f\colon \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ все строки различны. Докажите, что $C(f) \geq \log n$.

Compute CC

Input: Матрица функции M_f.
Task: Вычислить коммуникационную сложность M_f.

P 26. Придумайте эффективный алгоритм для задачи Compute CC.

Compute Fooling Set

Input: Матрица функции M_f.
Task: Вычислить максимальный размер трудного множества M_f.

P 27. Придумайте эффективный алгоритм для задачи Compute Fooling Set.

P 28. Алиса получает строку длины n с ровно одной единицей, а Боб получается строку с не менее двумя единицами. Их задача найти индекс бита, в котором их входы различаются. Предложите эффективный протокол для этой задачи

a) лучше $2\log_2 n$,

b) со сложностью $\log n + O(\log\log n)$.