ОЦЕНКИ НА КОММУНИКАЦИОННУЮ СЛОЖНОСТЬ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ И ИГР КАРЧМЕРА — ВИГДЕРСОНА В РАЗНЫХ МОДЕЛЯХ

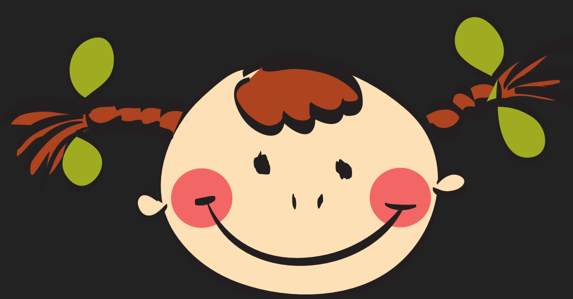
АРТУР ИГНАТЬЕВ

Санкт-Петербургский
государственный университет

КОММУНИКАЦИОННАЯ СЛОЖНОСТЬ

- Придумана Эндрю Яо в 1979 году.

Алиса



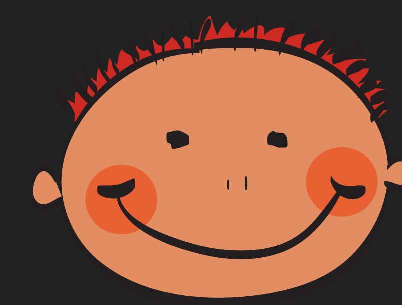
$x \in \{0,1\}^n$

b_1 →

b_2 ←

b_3 ←

Боб



$y \in \{0,1\}^n$

Алиса и Боб хотят вычислить $f(x, y)$.

ИГРЫ КАРЧМЕРА — ВИГДЕРСОНА

- Теорема 1 (Карчмер – Вигдерсон)
  Любой формуле Де Моргана соответствует коммуникационный протокол с той же структурой. Обратное тоже верно.
- Определение 1
  Игра Карчмера – Вигдерсона для функции $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$:
  - Алиса получает $x \in f^{-1}(0)$
  - Боб получает $y \in f^{-1}(1)$
  - Хотят найти $i \in [n]$, что $x_i \neq y_i$

ИГРЫ КАРЧМЕРА — ВИГДЕРСОНА

- Определение 2

  Обобщенная игра Карчмера – Вигдерсона для функции $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^r$:

  - Алиса получает $x \in \{0,1\}^n$
  - Боб получает $y \in \{0,1\}^n$
  - $f(x) \neq f(y)$
  - Хотят найти $i \in [n]$, что $x_i \neq y_i$

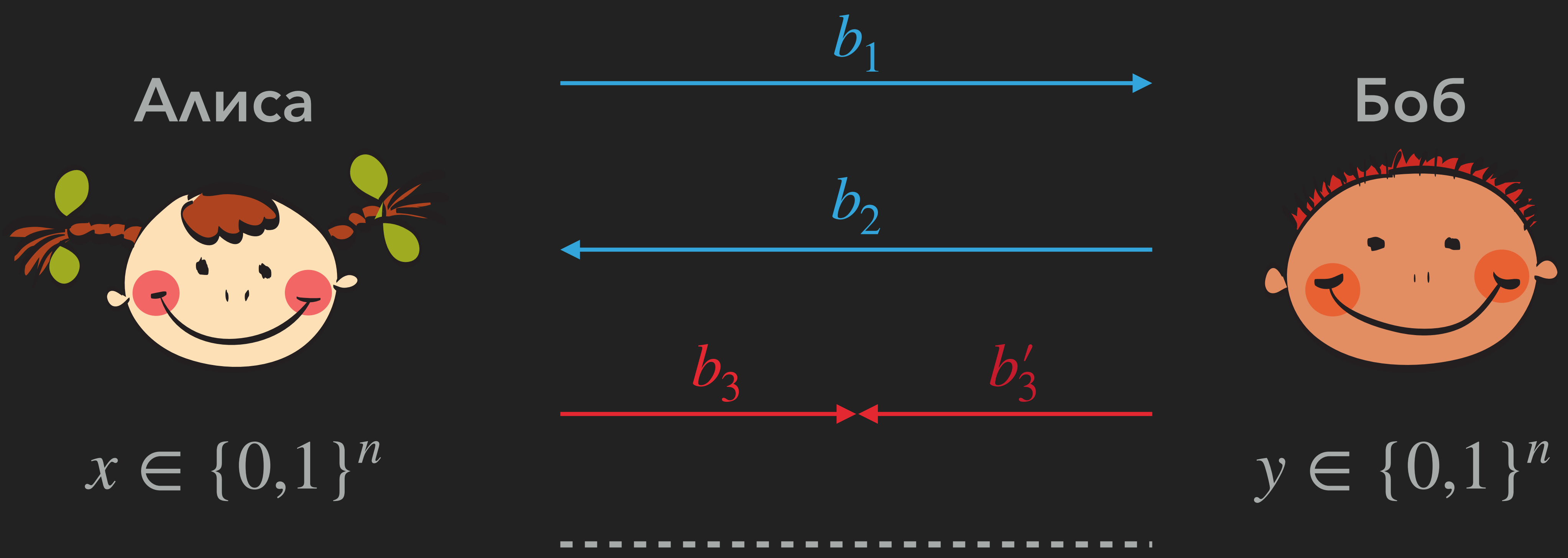
ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ

- Целью данной работы является доказательство оценок на коммуникационную сложность булевых функций. И игр Карчмера – Вигдерсона. Мы рассмотрим три мотива:

1. Полудуплексная коммуникационная сложность
2. Случайные ограничения
3. Коммуникационная сложность с оракулом

ПОЛУДУПЛЕКСНАЯ МОДЕЛЬ

- Игроки общаются по полудуплексному каналу (рации).



Алиса и Боб хотят вычислить $f(x, y)$.

ТИПЫ РАУНДОВ

- В этой модели есть три типа раундов.
    1. Обычный раунд: один посылает, другой принимает.
    2. Утраченный раунд: оба игрока посылают.
    3. Тихий раунд: оба игрока принимают.
- В [HIMS18] предложены три способа определить тихие раунды.
    - **Полудуплексная модель с тишиной**: игроки получают специальный символ (тишину), не 0 и не 1.
    - **Полудуплексная модель с нулем**: игроки получают 0 (неотличимо от обычного раунда).
    - **Полудуплексная модель с противником**: игроки получают биты, выбранные противником (или шум).

РЕЗУЛЬТАТЫ

- $\mathrm{D}_s^{hd}(R), \mathrm{D}_0^{hd}(R)$ и $\mathrm{D}_a^{hd}(R)$ – полудуплексная коммуникационная сложность R в модели с тишиной, нулем и противником, соответственно.

	GT_n	DISJ_n	KW_{MOD2_n}
D_s^{hd}	$\geq n/\log 5$ $\star$ $\leq n/\log 5 + o(n)$ $\star$	$\geq n/\log 5$ $\star$ $\leq n/2 + O(1)$	$\geq 2\log_5 n$ $\star$ $\leq 2\log_3 n$
D_0^{hd}	$\geq n/\log 3$ $\star$ $\leq n/\log 3 + o(n)$ $\star$	$\geq n/\log 3$ $\star$ $\leq 5n/6 + O(1)$ $\star$	$\geq 2\log_3 n$ $\star$ $\leq 3\log_3 n$ $\star$
D_a^{hd}	$\geq n/\log 2.5$ $\star$	$\geq n/\log 2.5$ $\star$	$= 2\log n$

РЕЗУЛЬТАТЫ

- $$\mathrm{D}_s^{hd}(KW_{\mathrm{MOD3}}) \le 1.89 \log n, \quad \mathrm{D}_s^{hd}(KW_{\mathrm{MOD3}}) \le 2.46 \log n,$$
$$\mathrm{D}_s^{hd}(KW_{\mathrm{MOD11}}) \le 3.48 \log n\,.$$

- Для произвольного $p \ge 2$,

$$\mathrm{D}_s^{hd}(KW_{\mathrm{MOD}p}) \le \frac{1 + \left\lceil \log_3 \frac{p}{2} \right\rceil}{\log \frac{2}{\sqrt{5}-1}} \cdot \log n$$

РЕЗУЛЬТАТЫ

- $\mathrm{N}_s^{hd}(f), \mathrm{N}_0^{hd}(f)$ и $\mathrm{N}_a^{hd}(f)$ – недетерминированная полудуплексная сложность f в модели с тишиной, нулем и противником, соответственно.
- Для любой $f : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}$,

$$\mathrm{N}_s^{hd}(f) = \mathrm{N}(f)/\log 5 + \Theta(\log \mathrm{N}(f)),$$
$$\mathrm{N}_0^{hd}(f) = \mathrm{N}(f)/\log 3 + \Theta(\log \mathrm{N}(f)),$$
$$\mathrm{N}_a^{hd}(f) \geq \mathrm{N}(f)/\log 3,$$

$\mathrm{N}(f)$ – классическая недетерминированная коммуникационная сложность f.

МЕТОД СЛУЧАЙНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

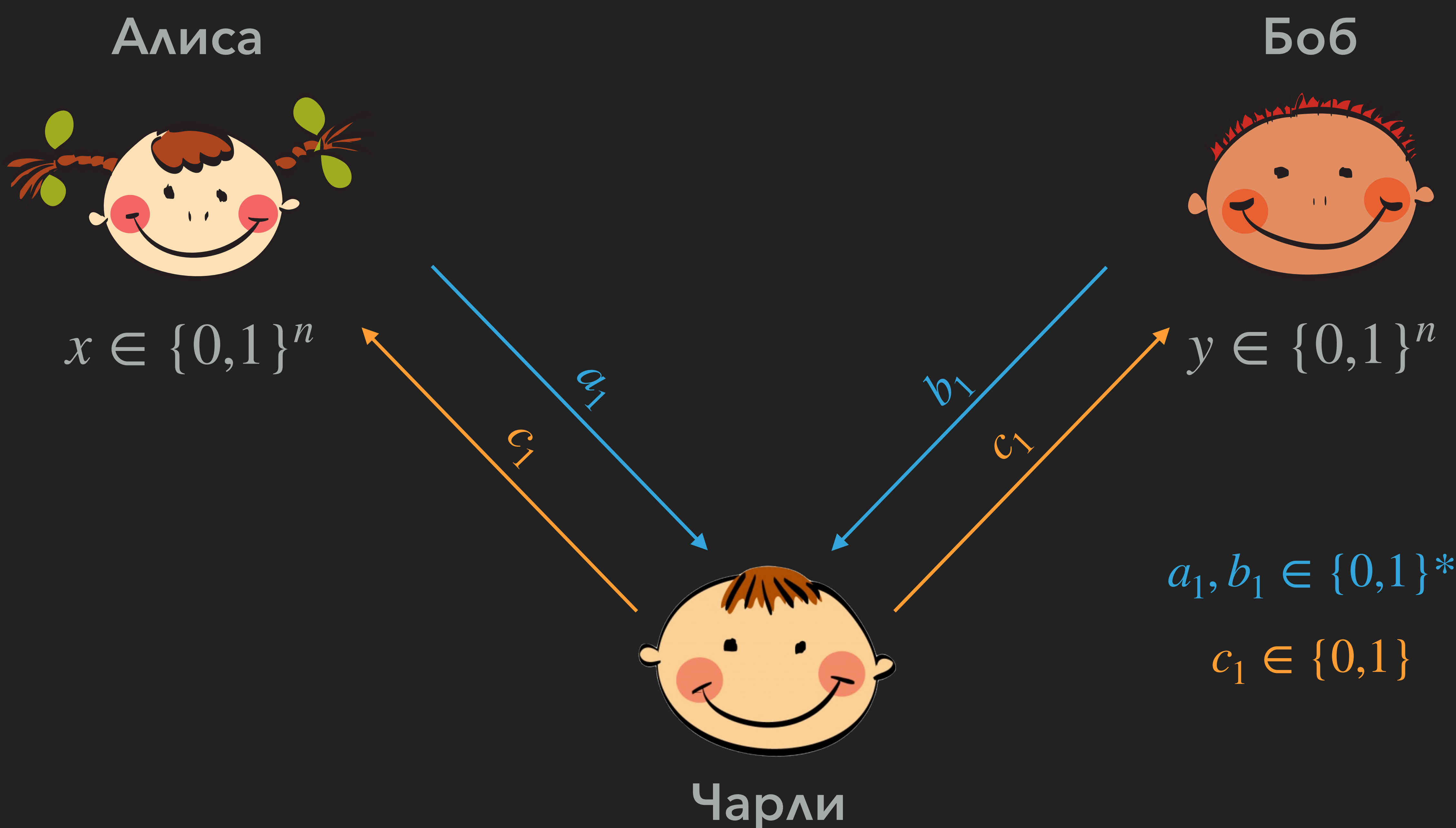
- Ограничение формулы – элемент $\{0,1,\star\}^n$. Случайное ограничение ρ:
  - $\rho(x_i) = \star$ с вероятностью p.
  - $\rho(x_i) = 0,\ \rho(x_i) = 1$ с вероятностью $\dfrac{1-p}{2}$.
- Данная техника впервые была рассмотрена Субботовской.
- Для формул Де Моргана Хостадом было доказано, что ожидаемый размер формулы после случайного ограничения равняется $O(p^2L)$.
- Данная техника позволяет доказать кубическую оценку на размер формулы явной булевой функции.

РЕЗУЛЬТАТЫ

- Результат Хостада получается перенести на случай обобщенных игр Карчмера – Вигдерсона.
- Этот результат полезен для доказательства суперкубической оценки на размер протокола обобщенной игры Карчмера – Вигдерсона для явной функции.

КОММУНИКАЦИЯ С ОРАКУЛОМ

- Игроки общаются с помощью оракула.



Чарли вычисляет некоторую функцию $A(a_i, b_i)$

КОММУНИКАЦИЯ С ОРАКУЛОМ

- Наиболее изученным оракулом является задача равенства EQ. Обозначим за $\mathrm{P}^{\mathrm{EQ}}(f)$ коммуникационную сложность с оракулом EQ.
- Интересно установить связь между $\mathrm{P}^{\mathrm{EQ}}(f)$ и вероятностной коммуникационной сложностью с общими случайными битами ($R(f)$).
- Существуют f и g: $\mathrm{P}^{\mathrm{EQ}}(f) = \Omega(n)$ и $R(f) = O(\log n)$, а также $\mathrm{P}^{\mathrm{EQ}}(g) = \Omega(\log n)$ и $R(g) = O(1)$.
- Остается вопрос о существовании симуляции вида $\mathrm{P}^{\mathrm{EQ}}(f) = 2^{R(f)} + \log n$.

РЕЗУЛЬТАТЫ

- Коммуникационная сложность EHD_k с оракулом EHD_ℓ не менее $\Omega(k/\ell)$.
- Коммуникационная сложность EHD_1 равна $n/2 + O(1)$.
- Сложность случайной функции с оракулом EQ^1 равна $n - o(n)$.
- Сложность случайной функции в полудуплексной модели с нулем и противником равна $n - o(n)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Доказана серия оценок на коммуникационную сложность булевых функций и игр Карчмера – Вигдерсона.

  1. Доказано несколько оценок в полудуплексной модели на $\mathrm{DISJ}, \mathrm{GT}, KW_{\mathrm{MOD}p}$
  2. Связь между полудуплексной недетерминированной сложностью и классической недетерминированной сложностью
  3. Адаптация метода случайных ограничений для обобщенных игр Карчмера – Вигдерсона
  4. Оценка на коммуникационную сложность EHD_k с оракулом EHD_ℓ
  5. Случайная функция с оракулом EQ^1 имеет сложность $n - o(n)$

ПУБЛИКАЦИИ

1. Dementiev, Y., Ignatiev, A., Sidelnik, V., Smal, A., Ushakov, M. – New Bounds on the Half-Duplex Communication Complexity. – // SOFSEM 2021. – 2021.
2. Ignatiev, A., Mihajlin, I., Smal, A. – Super-cubic lower bound for generalized Karchmer-Wigderson games. – // ECCC (preprint)